“课课通”普通高校对口升学系列学习指导丛书

课课通数学（第二册）

主　编　崔永红　狄昌进

副主编　戴伟明　叶开进　吴凤妹

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京・BEIJING

内 容 简 介

本书依据教育部 2009 年颁布的《中等职业学校数学教学大纲》及最新颁布的《江苏省普通高校对口单招数学考试大纲》的要求编写而成，适用于数学（第二册）。全书按课时编写，课时划分与教材同步，并进行了适当的调整和补充。每课时设有“学习目标”、“知识精要”、“基础过关”、“典型例题”、“巩固提高”、“高考链接”等栏目，每章后设有“小结与复习”。小结与复习由“知识结构”、“考纲解读”、“考题剖析”、“巩固训练”四部分组成。在编写过程中根据各章内容的不同特点简明扼要地说明知识要点、思想方法及注意点。精选例题，始终体现基础性、科学性和导向性。最后还附有每个单元的阶段测试卷及综合测试卷。测试卷单独成册，便于教师教学使用。

本书内容丰富、讲练结合、以练为主，突出学生的主体作用，精心设计的练习题典型性和针对性较强。本书适合中等职业学校参加普通高校对口升学考试的学生使用，同样也可以作为中等职业学校教师的参考用书及学生的自学用书。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

课课通数学. 第二册 / 崔永红，狄昌进主编. —北京：电子工业出版社，2014.4
（“课课通”普通高校对口升学系列学习指导丛书）
ISBN 978-7-121-22391-4

Ⅰ. ①课… Ⅱ. ①崔… ②狄… Ⅲ. ①数学课—中等专业学校—升学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 011677 号

策划编辑：张 凌 陶 亮
责任编辑：张 凌
印 刷：
装 订：
出版发行：电子工业出版社
北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036
开 本：787×1 092 1/16 印张：11.5 字数：441.6 千字 黑插：46
印 次：2014 年 4 月第 1 次印刷
定 价：45.00 元（附试卷）

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　言



数学是中等职业教育各专业必修的一门主要文化课程，也是升学考试中十分关键的一门学科。为了提高同学们的数学成绩和能力，使我们的学生实现由“学会”到“会学”，由“学好”到“好学”的转变，特编写了“课课通数学”系列教辅教材。我们希望通过名师点评、精讲精练，启迪学习者的思维，同时为提升数学对口升学考试的成绩，搭建一个强有力的平台，帮助同学们赢在学习的起点。

本书依据教育部 2009 年颁布的《中等职业学校数学教学大纲》（以下简称大纲）及最新颁布的《江苏省普通高校对口单招数学考试大纲》（以下简称考纲）的要求编写而成，适用于数学（第二册）。全书按课时编写，课时划分与教材同步，并进行了适当的调整和补充。本书体例和栏目设计如下：

学习目标　以大纲和考纲为标准，提出通过本课时的学习学生应达到的具体知识和能力目标。

知识精要　帮助学生提炼出本课时的主要内容及基本技能、技巧和方法。

基础过关　主要作课前预习用，配备 2～3 道同学们通过课前预习自己就能解决的练习题。

典型例题　精选若干典型例题进行分析和讲解，力求分析准确，解答规范。

巩固提高　分为“强化训练”和“能力拓展”两部分。强化训练用于当堂巩固所学知识，提高课堂教学效率，能力拓展用于课后复习巩固，提高学生能力。

高考链接　选 1～2 题与本课时内容、方法有紧密联系的单招试题，让学生感受高考。

小结与复习　分为“知识结构”、“考纲解读”、“考题剖析”、“巩固训练”四部分。通过小结与复习，使学生整体把握教材，系统梳理知识点，从而全面掌握本章内容。通过考纲解读和考题剖析使学生了解单招考试的考查方向和命题特点，提高学生的学习兴趣。

我们根据中等职业教育数学课程的教学目标和学生实际编写，扣纲靠本，着力双基训练，注重能力培养。本书具有以下特点：

基础性　帮助学生把握基础知识和基本技能，指导学生有效地独立获取知识，逐步培养学生的自学能力和应用能力。

科学性　遵循学科特点和学生的认知规律，循序渐进地引导学生夯实基础，提升能力。编写层次清楚，脉络分明。选题先易后难，形成梯度。努力培养学生养成科学合理的学习方法。

导向性　充分领会大纲和考纲精神，努力研究新教材的编写思想，紧跟单招考试的命题方向，体现新的课改成果。注重启发兴趣，努力提高学生学习数学的积极性和主动性。

本书由崔永红、狄昌进担任主编，戴伟明、叶开进、吴凤妹担任副主编。本书在编写和出版过程中，电子工业出版社的编辑们付出了辛勤的劳动，在此表示衷心的感谢。限于时间仓促

及编者水平，缺点和不完善之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

亲爱的同学们，本书作为实现理想的见证者，它不仅要见证你实现理想时付出的那份艰辛，更要见证你实现理想后收获的那份喜悦。同学们，让我们扬起理想的风帆从这里启航，共同努力，定能到达胜利的彼岸。

课课通数学编者组

2013 年 12 月

目　录



第 6 章　数列 …… 1

6.1　数列 …… 1
6.2　等差数列（一） …… 7
6.3　等差数列（二） …… 11
6.4　等比数列（一） …… 16
6.5　等比数列（二） …… 20
6.6　数列实际应用举例 …… 25
本章小结与复习 …… 30

第 7 章　平面向量 …… 35

7.1　平面向量的概念 …… 35
7.2　平面向量的加法、减法和数乘向量（一） …… 37
7.3　平面向量的加法、减法和数乘向量（二） …… 40
7.4　平面向量的坐标运算 …… 43
7.5　平面向量的内积（一） …… 47
7.6　平面向量的内积（二） …… 50
本章小结与复习 …… 53

第 8 章　直线与圆的方程 …… 56

8.1　两点间的距离公式及中点公式 …… 56
8.2　直线的倾斜角和斜率 …… 59
8.3　直线的方程（一） …… 62
8.4　直线的方程（二） …… 65
8.5　两直线的位置关系（一） …… 68
8.6　两直线的位置关系（二） …… 72
8.7　点到直线的距离公式 …… 74
8.8　圆的方程（一） …… 77
8.9　圆的方程（二） …… 81
8.10　直线和圆的位置关系（一） …… 84
8.11　直线和圆的位置关系（二） …… 88
8.12　直线与圆的方程应用举例 …… 91
本章小结与复习 …… 97

第 9 章　立体几何 …… 101

9.1　平面的基本性质 …… 101
9.2　空间两条直线的位置关系 …… 104
9.3　直线与平面的位置关系（一） …… 106
9.4　直线与平面的位置关系（二） …… 110
9.5　平面与平面的位置关系（一） …… 114
9.6　平面与平面的位置关系（二） …… 117
9.7　柱、锥、球及其组合体（一） …… 121
9.8　柱、锥、球及其组合体（二） …… 125
本章小结与复习 …… 128

第 10 章　概率统计 …… 133

10.1　计数原理 …… 133
10.2　随机事件和概率 …… 136
10.3　概率的简单性质 …… 140
10.4　等可能事件的概率（一） …… 144
10.5　等可能事件的概率（二） …… 147
10.6　总体、样本和抽样方法（一） …… 151
10.7　总体、样本和抽样方法（二） …… 154
10.8　总体分布估计 …… 157
10.9　总体特征值估计 …… 163
10.10　一元线性回归 …… 167
本章小结与复习 …… 172

第 6 章　数　列

6.1　数列

【学习目标】

1．知识目标：（1）了解数列的概念，了解数列的分类；
（2）理解数列的通项公式，并会根据通项公式写出数列的任意一项；
（3）理解数列的前 n 项和 S_n 与通项公式 a_n 之间的关系.

2．能力目标：（1）理解数列与函数的关系，了解数列的递推公式，会根据数列的递推公式写出前几项；
（2）培养学生积极参与、大胆探索的精神，培养学生观察、分析、归纳的能力.

【知识精要】

1. 数列的定义

按一定次序排列的一列数叫做数列.

注意（1）数列中的数是按一定次序排列的，因此，如果组成两个数列的数相同而排列次序不同，那么它们就是不同的数列；例如 1，2，3 和 3，2，1 就是两个不同的数列；

（2）定义中并没有规定数列中的数必须不同，因此，同一个数在数列中可以重复出现.

2. 数列的项

数列中的每一个数都叫做这个数列的项. 各项依次叫做这个数列的第 1 项（或首项），第 2 项，…，第 n 项，…

3. 数列的一般形式

a_1，a_2，a_3，…，a_n，…，或简记为 $\{a_n\}$，其中 a_n 是数列的第 n 项.

注意数列的概念和数列的记号 $\{a_n\}$ 与集合的概念和集合的记号的区别：

（1）数列中的项是有序的，集合中的元素是无序的；

（2）数列中的项可以重复，集合中的元素不能重复；

（3）记号 $\{a_n\}$ 表示数列，集合是要把元素列举出来或把元素满足的属性表示出来.

4. 数列的通项公式

如果数列$\{a_n\}$的第 n 项a_n与n之间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的通项公式.

注意（1）并不是所有数列都能写出其通项公式，如数列：3，3.1，3.14，3.141，3.1415，…

（2）一个数列的通项公式有时是不唯一的，如数列：1，0，1，0，1，0，…它的通项公式可以是$a_n=\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$，也可以是$a_n=|\cos\dfrac{n+1}{2}\pi|$，还可以是$a_n=\begin{cases}1, & (n\text{是奇数})\\ 0, & (n\text{是偶数})\end{cases}$.

（3）数列通项公式的作用：①求数列中任意一项；②检验某数是否是该数列中的一项.

数列的通项公式具有双重身份，它表示了数列的第n项，又是这个数列中所有各项的一般表示. 通项公式反映了一个数列项与项数的函数关系，给了数列的通项公式，这个数列便确定了，代入项数就可求出数列的每一项.

5. 数列与函数的关系

数列可以看成以正整数集 $\mathbf{N}^*$（或它的有限子集$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$）为定义域的函数$a_n=f(n)$，当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值.

反过来，对于函数$y=f(x)$，如果$f(i)(i=1, 2, 3, 4, \cdots)$有意义，那么我们可以得到一个数列$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$，…，$f(n)$，….

6. 数列的分类

（1）根据数列项数的多少分为

有穷数列：项数有限的数列. 例如数列 1，2，3，4，5，6 是有穷数列；

无穷数列：项数无限的数列. 例如数列 1，2，3，4，5，6，…就是无穷数列.

（2）根据数列项的大小分为

递增数列：从第 2 项起，每一项都不小于它的前一项的数列；

递减数列：从第 2 项起，每一项都不大于它的前一项的数列；

常数数列：各项相等的数列；

摆动数列：从第 2 项起，有些项大于它的前一项，有些项小于它的前一项的数列.

7. 数列前n项的和S_n和项a_n的关系

$$a_n=\begin{cases}S_1 & n=1\\ S_n-S_{n-1} & n\geqslant 2\end{cases}$$

【基础过关】

1. 根据给出数列的前 4 项，写出下列数列的第 5 项和第 6 项，并试着写出数列的一个通项公式.

（1）1，2，4，8，____，____，…；

（2）5，15，25，35，____，____，…；

（3）1，4，9，16，____，____，…；

（4）1，11，111，1111，____，____，…；

（5）$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$,____，____，…；

（6）$-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{16}, \frac{7}{25}$,____，____，…；

（7）1，0，1，0，____，____，…；

（8）3，8，15，24，____，____，….

2．已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+n-3}$，求它的前 5 项和第 10 项.

【典型例题】

例 6-1-1　根据给出数列的通项公式写出其前 5 项，并作出它的图像.

（1）$a_n=\frac{n}{n+2}$；　　（2）$a_n=\frac{(-1)^n}{2^n}$. 你能写出第 10 项吗?

【要点解析】通项公式反映的是项a_n和项数n之间的函数关系（n取正整数）. 给出通项公式求对应的项就是对项数n进行赋值，求第几项就是赋予n等于几.

【解】用列表法给出数列的前 5 项为：

n	1	2	3	4	5	…	10	…
$a_n=\frac{n}{n+2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	…	$\frac{5}{6}$	…
$a_n=\frac{(-1)^n}{2^n}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$	…	$\frac{1}{2^{10}}$	…

（1）数列的前 5 项依次为：$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{7}$，第 10 项为$\frac{5}{6}$；

（2）数列的前 5 项依次为：$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，$-\frac{1}{32}$，第 10 项为$\frac{1}{2^{10}}$.

它们的图像如图 6-1-1 所示.

例 6-1-2　写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数:

（1）$\frac{1}{1\times2}$，$-\frac{1}{2\times3}$，$\frac{1}{3\times4}$，$-\frac{1}{4\times5}$；

（2）0，2，0，2.

【要点解析】写出数列的通项公式就是寻找项a_n和项数n之间的函数关系$a_n=f(n)$（n取正整数）.

【解】（1）这个数列的前四项的分母都等于序号与序号加 1 的积，且奇数项为正，偶数项为负，所以它的一个通项公式是$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$.

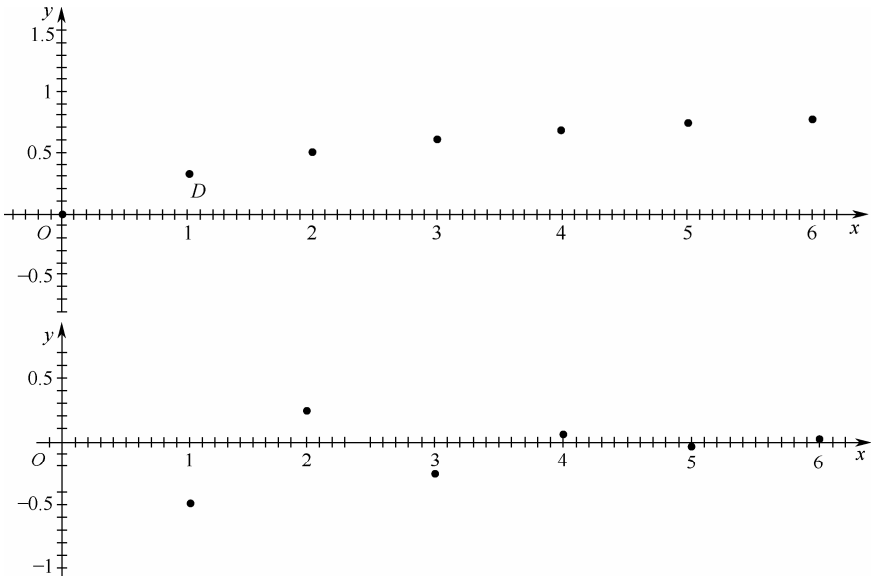


图 6-1-1

（2）这个数列的奇数项为 0，偶数项为 2，所以它的一个通项公式是 $a_n=1+(-1)^n$.

【点评】通项公式不唯一，想想看，这个数列的通项公式还能表示成哪些呢？

$a_n=|\cos\frac{n+1}{2}\pi|$ 行不行？ $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+n}$ 行不行？ $a_n=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(n+1)^2-1}$ 行不行？

例 6-1-3 如果数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=\frac{n^2}{n-1}$，12.1 是这个数列中的项吗？如果是，是第几项？

【要点解析】判断一个数是否是数列中的项，关键要把握数列中的项数 $n\in\mathbf{N}_+$的条件.

【解】$12.1=\frac{n^2}{n-1}$ 时，解得 $n=11\in\mathbf{N}_+$.

所以 12.1 是这个数列中的项，是第 11 项.

例 6-1-4 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n，若（1）$S_n=n^2+n+2$；（2）$S_n=2n^2+n$. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【要点解析】已知 S_n 求 a_n 的关键是公式 $a_n=\begin{cases}S_1 & n=1\\ S_n-S_{n-1} & n\geqslant 2\end{cases}$ 的应用，特别要注意 a_1 的验证.

【解】（1）当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=4$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n+2-[(n-1)^2+(n-1)+2]=2n$.

$n=1$ 时，$4\neq 2\times 1$

所以 $a_n=\begin{cases}4 & (n=1)\\ 2n & (n\geqslant 2)\end{cases}$.

（2）当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=3$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2+n-[2(n-1)^2+(n-1)]=4n-1$.

$n=1$ 时，$3=4\times1-1$

所以 $a_n=4n-1$.

【巩固提高】

一、强化训练

1．根据给出数列的通项公式，写出其前 5 项：

（1）$a_n=n+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$；

（2）$a_n=(-1)^{n+1}n(n+1)$；

（3）$a_n=\dfrac{2n}{(2n-1)(2n+1)}$；

（4）$a_n=\dfrac{3n-2}{n}$.

2. 根据下面数列的前几项的值，写出数列的一个通项公式：

（1）0，1，0，1，…；

（2）$-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{8}$，$-\dfrac{4}{15}$，$\dfrac{5}{24}$，$-\dfrac{6}{35}$，…；

（3）−1，7，−13，19，−25，31，…；

（4）1，3，7，15，…；

（5）$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{4}{3}$，3，$\dfrac{16}{3}$，…；

（6）$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{4}{15}$，$\dfrac{6}{35}$，$\dfrac{8}{63}$，$\dfrac{10}{99}$，….

3. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=\dfrac{2n^2}{3n-1}$，$\dfrac{72}{17}$ 和 2.5 是这个数列中的项吗？如果是，是第几项？

4. 数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和 $S_n=-2n^2+6n$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

5. 已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=2$，且$a_{n+1}=a_n-4$，试写出这个数列的前 4 项，并归纳出通项公式.

6. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_{10}=21$，通项公式a_n是项数的一次函数，求数列$\{a_n\}$的通项公式，并求a_{2013}.

7. 数列$\{a_n\}$前 n 项的和$S_n=2^{n+1}-2$，（1）求数列的通项公式；（2）设$b_n=a_n+a_{n+1}$，写出数列$\{b_n\}$的前 5 项.

8. 在数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=1$，$S_n=n^2a_n$，求a_n及S_n.

二、能力拓展

9. 根据下面数列的前几项的值，写出数列的一个通项公式.

（1）7，77，777，7777，…；　　（2）0.9，0.99，0.999，0.9999，….

10. 在数列$\{a_n\}$中，已知$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$，求S_n.

【高考链接】

（2008年单招试题）数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=2+a_n$，且$a_2=-1$，则$a_8=$（　　）

A. 13　　B. 11　　C. 9　　D. 12

6.2 等差数列（一）

【学习目标】

1．知识目标：（1）理解等差数列的概念，了解等差数列的通项公式的推导过程及思想；
（2）掌握等差数列的通项公式，掌握等差中项的概念；
（3）能利用定义或中项公式证明一个数列是等差数列；
（4）能灵活应用等差数列的概念和通项公式解决问题．

2．能力目标：（1）培养学生观察分析、猜想归纳、应用公式的能力；
（2）在领会函数与数列关系的前提下，渗透函数与方程的思想．

【知识精要】

1．等差数列的定义

在数列$\{a_n\}$中，若$a_{n+1}-a_n=d$（常数），即从第2项起，每一项与它前一项的差等于同一常数，则称这个数列为等差数列，常数d称为公差．当$d=0$时，数列为常数列．等差数列的首项a_1，公差d，第n项a_n和项数n是等差数列的四个基本量．

2．通项公式

$a_n=a_1+(n-1)d$，$a_n=a_m+(n-m)d$（m，$n\in\mathbf{N}^*$），当公差$d\neq0$时，等差数列的通项公式$a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d$是关于n的一次函数，图像是一条直线上的一些分散的点．

3．等差中项

如果a，A，b成等差数列，那么A叫做a与b的等差中项．即A是a与b的等差中项$\Leftrightarrow 2A=a+b\Leftrightarrow a$，$A$，$b$成等差数列．

4．等差数列的性质

在等差数列$\{a_n\}$中，若$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$（m，n，p，$q\in\mathbf{N}^*$）．

特别地，若$2t=p+q$，则$2a_t=a_p+a_q$（p，q，$t\in\mathbf{N}^*$）．

5．证明或判定数列$\{a_n\}$是等差数列的方法

定义法：$a_{n+1}-a_n=d$（常数）或　$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}$（$n\geqslant2$）．

中项法：$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$．

【基础过关】

1．判断下列数列中哪些是等差数列，哪些不是？如果是，写出首项 a_1 和公差 d；如果不是，说明理由.

（1）4，7，10，13；　（2）−3，−2，−1，1；　（3）1，0，1，0，1，0；

（4）1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$；　（5）9，6，3，0；　（6）0，0，0，0，….

2．写出下列等差数列中的未知项：

（1）3，____，5；　（2）3，___，____，−9.

3．观察等差数列 $\{a_n\}$：4，7，10，13，16，…，求 a_{100}.

4．2011 是数列：1，4，7，10，…，的第_____项？ 2013 是不是这个数列中的项？

5．3，9 的等差中项是_____.

【典型例题】

例 6-2-1　在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=-1$，$d=4$，求 a_8.

【要点解析】等差数列 $\{a_n\}$ 中首项 a_1，公差 d，项数 n 和项 a_n 这四个基本量都直接反映在通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 中. 故本题可以借助通项公式解决问题.

【解】由通项公式知：$a_8=a_1+(8-1)d=-1+(8-1)\times 4=27$.

例 6-2-2　已知等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=4n+3$，求首项 a_1 和公差 d.

【要点解析】已知等差数列的通项公式求指定的项就是直接把项数 n 对应的整数值代入通项公式，求公差可以根据定义求出相邻的两项，用后项减去前项求得.

【解】 方法一　$a_1=4\times 1+3=7$，$a_2=4\times 2+3=11$

所以　$d=a_2-a_1=4$

方法二　$a_1=4\times 1+3=7$

$d=a_{n+1}-a_n=4(n+1)+3-(4n+3)=4$

例 6-2-3　在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_{15}=8$，$a_{60}=20$，求 a_{75}.

【要点解析】可以抓住等差数列的通项公式考虑基本量法，也可以灵活利用等差数列的性质.



【解】 方法一 $\because \begin{cases} a_{15}=a_1+14d \\ a_{60}=a_1+59d \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a_1=\dfrac{64}{15} \\ d=\dfrac{4}{15} \end{cases}$

$\therefore a_{75}=a_1+74d=\dfrac{64}{15}+74\times\dfrac{4}{15}=24.$

方法二 $\because d=\dfrac{a_{60}-a_{15}}{60-15}=\dfrac{20-8}{45}=\dfrac{4}{15}$，

$\therefore a_{75}=a_{60}+(75-60)d=20+15\times\dfrac{4}{15}=24.$

方法三 令 $a_n=an+b$，则 $\begin{cases} 15a+b=8 \\ 60a+b=20 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=\dfrac{16}{45} \\ b=\dfrac{8}{3} \end{cases}$

$\therefore a_{75}=75a+b=75\times\dfrac{16}{45}+\dfrac{8}{3}=24.$

方法四 $\because \{a_n\}$ 为等差数列，

$\therefore a_{15}$，a_{30}，a_{45}，a_{60}，a_{75} 也成等差数列，设其公差为 d_1，则 a_{15} 为首项，a_{60} 为第 4 项.

$\therefore a_{60}=a_{15}+3d_1$，$\therefore 20=8+3d_1$，解得 $d_1=4$

$\therefore a_{75}=a_{60}+d_1=20+4=24.$

【点评】给项求项问题，可以先考虑利用等差数列的性质，再考虑基本量法. 本题求解常用方法 1 和方法 2，方法 3、4 也可以考虑使用.

例 6-2-4　已知 5 个数成等差数列，它们的和为 5，平方和为 165，求这 5 个数.

【要点解析】如何利用 5 个数成等差数列把这 5 个数设出来.

【解】设这 5 个数分别为 $a-2d$，$a-d$，a，$a+d$，$a+2d$. 则

$$\begin{cases} (a-2d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+2d)=5 \\ (a-2d)^2+(a-d)^2+a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2=165 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ 5a^2+10d^2=165 \end{cases}$$

解得 $a=1$，$d=\pm 4$

当 $a=1$，$d=4$ 时，这 5 个数分别为：-7，-3，1，5，9；

当 $a=1$，$d=-4$ 时，这 5 个数分别为：9，5，1，-3，-7.

例 6-2-5　在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_5=120$，求 $a_2+a_4+a_5+a_6+a_8$.

【要点解析】利用等差中项的性质，$2a_5=a_2+a_8=a_4+a_6$.

【解】因为 $2a_5=a_2+a_8=a_4+a_6$，

所以 $a_2+a_4+a_5+a_6+a_8=5a_5=5\times 120=600.$

例 6-2-6　已知 a，b，c 成等差数列，求证：a^2-bc，b^2-ac，c^2-ab 也成等差数列.

【要点解析】证明几个数成等差数列的方法一是定义法，二是中项法.

证法一 因为 a，b，c 成等差数列，不妨设公差为 d，

所以 $b=a+d$，$c=a+2d$

所以 $a^2-bc=a^2-(a+d)(a+2d)=-3ad-2d^2$

$b^2-ac=(a+d)^2-a(a+2d)=d^2$

$c^2-ab=(a+2d)^2-a(a+d)=3ad+4d^2$

又因为$(a^2-bc)+(c^2-ab)=(-3ad-2d^2)+(3ad+4d^2)=2d^2=2(b^2-ac)$

即$(a^2-bc)+(c^2-ab)=2(b^2-ac)$

所以a^2-bc，b^2-ac，c^2-ab成等差数列.

证法二 $(b^2-ac)-(a^2-bc)=(b^2-a^2)+(bc-ac)=(b-a)(a+b+c)$

$(c^2-ab)-(b^2-ac)=(c^2-b^2)+(ac-ab)=(c-b)(a+b+c)$

因为a，b，c成等差数列，

所以$b-a=c-b$

所以$(b-a)(a+b+c)=(c-b)(a+b+c)$

即$(b^2-ac)-(a^2-bc)=(c^2-ab)-(b^2-ac)$

所以a^2-bc，b^2-ac，c^2-ab成等差数列.

证法三 因为a，b，c成等差数列，

所以$2b=a+c$

$(a^2-bc)+(c^2-ab)=(a^2+c^2)-b(a+c)=(a+c)^2-2ac-2b^2=2(b^2-ac)$

即$(a^2-bc)+(c^2-ab)=2(b^2-ac)$

所以a^2-bc，b^2-ac，c^2-ab成等差数列.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 已知等差数列$\{a_n\}$的前三项为$x-1$，$x+1$，$2x+3$，求这个数列的通项公式.

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_7+a_9=16$，$a_4=1$，求a_{12}.

3. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=\frac{1}{3}$，$a_2+a_5=4$，$a_n=33$，求项数n.

4. 设三个数组成递增等差数列，和为12，积为48，求这三个数.

5. 已知$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$成等差数列，求证：$\frac{b+c}{a}$，$\frac{c+a}{b}$，$\frac{a+b}{c}$也成等差数列.

二、能力拓展

6. 若$m \neq n$，且m，a_1，a_2，a_3，n和m，b_1，b_2，b_3，b_4，n都成等差数列，则$\frac{a_3-a_1}{b_3-b_2}=$____.

7. 已知$\{a_n\}$为等差数列，$a_1+a_3+a_5=105$，$a_2+a_4+a_6=99$，求a_{20}.

8. 等差数列$\{a_n\}$中，若$a_p=q$，$a_q=p(p\neq q)$，求a_{p+q}.

【高考链接】

（2002年单招试题）在等差数列$\{a_n\}$中，a_{15}=33，a_{45}=153，则217是这个数列的第____项.

6.3 等差数列（二）

【学习目标】

1．知识目标：（1）理解并掌握等差数列前n项和公式，并会应用公式解决简单的问题；
（2）熟练掌握等差数列通项公式与前n项和公式的综合应用，培养学生的运算能力.

2．能力目标：通过公式的推导和应用，培养学生观察、猜想、归纳、分析、综合推理的能力，渗透特殊到一般的思想.

【知识精要】

1．等差数列前 n 项和的定义

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$.

2．等差数列前 n 项和的求法

倒序相加.

3. 等差数列前 n 项和的公式

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n = An^2 + Bn .$$

【基础过关】

1. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 a_1=2，a_{10}=20，求 S_{10} 和 S_{19}.

2. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 a_5=2，a_{n-4}=30($n \geqslant 5$，$n \in \mathbf{N}^*$)，S_n=336，求 n 的值.

【典型例题】

例 6-3-1 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}(n \geqslant 2,\ n \in \mathbf{N}^*)$，$a_n = \frac{3}{2}$，前 n 项和 $S_n = -\frac{15}{2}$，求 a_1 和 n.

【要点解析】在 a_1，a_n，d，n，S_n 五个量中，只要知道其中三个量就能求出另外二个量，把这种问题叫做知三求二型问题.

【解】由 $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}$ 可知等差数列的公差 $d = a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2}$，

$$\text{所以}\begin{cases} S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2} \\ a_n = a_1 + (n-1)d \end{cases} \text{可得}\begin{cases} -\dfrac{15}{2} = \dfrac{(a_1 + \frac{3}{2})n}{2} \\ \dfrac{3}{2} = a_1 + (n-1)\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{解得}\begin{cases} a_1 = -6 \\ n = 10 \end{cases}.$$

例 6-3-2 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$，求 S_{20}.



【要点解析】 $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\times n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$，要根据已知条件灵活应用公式.

【解】 由 $a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=20$ 可得 $a_6+a_{15}=a_9+a_{12}=10$

又因为 $a_1+a_{20}=a_6+a_{15}=10$

所以 $S_{20}=\dfrac{a_1+a_{20}}{2}\times 20=(a_1+a_{20})\times 10=100$.

例 6-3-3 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=25$，$S_9=S_{17}$，问此数列前多少项和最大？并求此最大值.

【要点解析】“首正”的递减等差数列中，前 n 项和的最大值是所有非负项之和；“首负”的递增等差数列中，前 n 项和的最小值是所有非正项之和.

方法 1：由不等式组 $\begin{cases}a_n\geqslant 0\\ a_{n+1}\leqslant 0\end{cases}$（或 $\begin{cases}a_n\leqslant 0\\ a_{n+1}\geqslant 0\end{cases}$）确定出前多少项为非负（或非正）；

方法 2：因等差数列前 n 项的和是关于 n 的二次函数，故可转化为求二次函数的最值，但要注意数列的特殊性 $n\in\mathbf{N}^*$.

【解】 **方法一** 由 $S_{17}=S_9$，得到 $\dfrac{17(a_1+a_{17})}{2}=\dfrac{9(a_1+a_9)}{2}$，即 $17(2a_1+16d)=9(2a_1+8d)$，

又 $a_1=25$，解得 $d=-2$

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=-2n+27$，

在首项为正，公差为负是递减的等差数列中，前 n 项和的最大值是所有非负项之和.

所以 $\begin{cases}a_n\geqslant 0\\ a_{n+1}\leqslant 0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}-2n+27\geqslant 0\\ -2(n+1)+27\leqslant 0\end{cases}$，所以 $\dfrac{25}{2}\leqslant n\leqslant\dfrac{27}{2}$，又 $n\in\mathbf{N}^*$

所以，$n=13$，此时 $S_{13}=13\times 25+\dfrac{13\times 12}{2}(-2)=169$.

方法二 由 $S_{17}=S_9$，得到 $\dfrac{17(a_1+a_{17})}{2}=\dfrac{9(a_1+a_9)}{2}$，即 $17(2a_1+16d)=9(2a_1+8d)$，

又 $a_1=25$，解得 $d=-2$

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=-2n+27$，

则 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(-2n+52)}{2}=-n^2+26n=-(n-13)^2+169$，

所以当 $n=13$ 时，$(S_n)_{\max}=169$.

例 6-3-4 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n，且 $S_4=-62$，$S_6=-75$，求：

（1）数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 及前 n 项的和 S_n；

（2）$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{14}|$.

【要点解析】（1）通过解方程组易求得首项和公差，再求 a_n 及 S_n；解答（2）的关键在于判断项的变化趋势.

【解】 设等差数列首项为 a_1，公差为 d，依题意得 $\begin{cases}4a_1+6d=-62\\ 6a_1+15d=-75\end{cases}$

解得 $a_1=-20$，$d=3$

（1）$a_n=a_1+(n-1)d=3n-23$，$S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=\dfrac{n(-20+3n-23)}{2}=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{43}{2}n$；

（2）∵ $a_1=-20$，$d=3$，∴ $\{a_n\}$的项随着n的增大而增大.

设$a_k\leqslant 0$且$a_{k+1}\geqslant 0$，得$3k-23\leqslant 0$，且$3(k+1)-23\geqslant 0$，∴ $\frac{20}{3}\leqslant k\leqslant\frac{23}{3}(k\in\mathbf{N}^*)$，

$k=7$，即第7项之前均为负数

$\therefore |a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{14}|=-(a_1+a_2+\cdots+a_7)+(a_8+a_9+\cdots+a_{14})$

$=S_{14}-2S_7=147$.

例 6-3-5 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，如果第 1 项到第 10 项的和为 310，第 11 项到第 20 项的和为 910，求第 21 项到第 30 项的和.

【要点解析】与前 n 项的和有关，基本方法利用公式求出基本量解决问题.

【解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，由题意得

$$\begin{cases}S_{10}=310\\ S_{20}-S_{10}=910\end{cases}$$

即 $\begin{cases}10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=310\\ 20a_1+\frac{20\times 19}{2}d-310=910\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=4\\ d=6\end{cases}$

所以 a_{21}=4+20 × 6=124

于是 $a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{30}=10\times 124+\frac{10\times 9}{2}\times 6=1510.$

【点评】在等差数列 $\{a_n\}$ 中，相继 n 项的和 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，… 也成等差数列.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 根据下列各题中的条件，求相应的等差数列 $\{a_n\}$ 中的有关未知数：

（1）$d=2$，$n=15$，a_n=−10，求 a_1 和 S_n；（2）$S_5=25$，$a_2=3$，求 a_7；

（3）$a_2=3$，$a_6=11$，求 S_7；

（4）$a_1=\frac{5}{6}$，$d=-\frac{1}{6}$，S_n=−5，求 n 及 a_n.

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=-2.5$，$d=0.4$，求当 n 为何值时，S_n 最小？

3．设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1<0$，$S_3=S_{11}$，求当 n 为何值时，S_n 最小？

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $S_n=48$，$S_{2n}=60$，求 S_{3n}.

5. 一个项数为奇数的等差数列，所有奇数项的和为 72，所有偶数项的和为 66，则这个数列共有多少项？

6. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_3=12$，$S_{12}>0$，$S_{13}<0$.

（1）求公差 d 的取值范围；

（2）指出 S_1，S_2，S_3，…，S_{12} 中哪个值最大，并说明理由.

二、能力拓展

7. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $S_9<0$，$a_3+a_8>0$，求当 n 为何值时，S_n 最小？

8. 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_n=2n-33$，求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和 S_n.

【高考链接】

（2005 年单招试题）若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=an^2+bn+c$（a、b、c 为常数），则这个数列是等差数列的充要条件是（　　）

A. $a=0$　　B. $b=0$　　C. $c=0$　　D. $a\neq 0$ 且 $c=0$

6.4　等比数列（一）

【学习目标】

1. 知识目标：（1）理解等比数列的概念，掌握等比数列的通项公式，掌握等比中项的概念；
（2）灵活应用等比数列的概念和通项公式解决问题；
（3）能运用定义或中项公式证明数列是等比数列.
2. 能力目标：培养学生观察分析、猜想归纳、类比分析、应用公式的能力.

【知识精要】

1. 等比数列定义

在数列 $\{a_n\}$ 中，若 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$，即从第 2 项起，每一项与它前一项的比等于同一常数，这样

的数列叫做等比数列，此常数用 q 表示，称为公比.

注意 公比 q 不能为零，等比数列中一定不会出现数 0.

2．通项公式

$a_n = a_1 q^{n-1} = a_m q^{n-m}(m,\ n \in \mathbf{N}^*)$.

3．等比中项

若 a，G，b 成等比数列，则 G 叫做 a，b 的等比中项，且 $G^2 = ab$.

特别提醒 不是任何两数都有等比中项，只有同号两数才存在等比中项，且有两个 $\pm\sqrt{ab}$.

4．等比数列的性质

在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $m+n=p+q$，则 $a_m a_n = a_p a_q (m,\ n,\ p,\ q \in \mathbf{N}^*)$.

特别地 若 $2t = p + q$，则 $a_t^{\,2} = a_p a_q (p,\ q,\ t \in \mathbf{N}^*)$.

5．证明数列 $\{a_n\}$ 是等比数列的方法

定义法：$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$（常数）或 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

中项法：$a_{n+1}^{\,2} = a_n a_{n+2}$.

【基础过关】

1．判断下列数列是否为等比数列：

（1）1，1，1，1，1；　　（2）0，1，2，4，8；　　（3）$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{1}{16}$.

2．在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1 = 2$，$a_4 = 54$，求该等比数列的通项公式 a_n.

3．有四个数 3，x，9，y，若前三个数成等差数列，后三个数成等比数列，则 $x =$___，$y =$___；若前三个数成等比数列，后三个数成等差数列，则 $x =$_____，$y =$_____.

【典型例题】

例 6-4-1　在等比数列 $\{a_n\}$ 中，（1）已知 $a_1 = 3$，$q = -2$，求 a_6；（2）已知 $a_3 = 20$，$a_6 = 160$，求 a_n.

【解】（1）由等比数列的通项公式可得 $a_6 = 3 \times (-2)^5 = -96$.

（2）设等比数列的公比为 q，那么 $\begin{cases} a_1 q^2 = 20 \\ a_1 q^5 = 160 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a_1 = 5 \\ q = 2 \end{cases}$

所以，$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 5 \times 2^{n-1}$.

例 6-4-2 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$，它的第 1，5，17 项顺次成等比数列，求这个等比数列的公比.

【要点解析】因为等差数列的第 1，5，17 项顺次成等比数列，得到 $a_5^2 = a_1 a_{17}$，然后根据等差数列的通项公式分别求出这三项，解得 $a_1 = 2d$，求出第 5 项与第一项的比值得到公比 q.

【解】由于等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$，它的第 1，5，17 项顺次成等比数列，即 $a_5^2 = a_1 a_{17}$，由等差数列的通项公式可得 $(a_1+4d)^2 = a_1(a_1+16d)$.

所以 $a_1 = 2d$，于是 $a_5 = a_1 + 4d = 6d$，所以 $q = \dfrac{a_5}{a_1} = \dfrac{6d}{2d} = 3$.

例 6-4-3 三个正数成等差数列，它们的和为 15，如果它们分别加上 1，3，9 就成为等比数列，求这三个数.

【要点解析】根据题意设三个数为 $a-d$，a，$a+d$，根据条件列方程组，解之即可（注意取舍）.

【解】设这三个数为 $a-d$，a，$a+d$，则 $\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=15\\(a-d+1)(a+d+9)=(a+3)^2\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=5\\d=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=5\\d=-10\end{cases}$（舍去），故所求的三个数为 3，5，7.

例 6-4-4 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列且 $a_3 = 2$，$a_2 + a_4 = \dfrac{20}{3}$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【要点解析】等比数列与项有关的量，主要应用通项公式，抓住基本量.

【解】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $q \neq 0$，$a_2 = \dfrac{a_3}{q} = \dfrac{2}{q}$，$a_4 = a_3 q = 2q$

所以 $\dfrac{2}{q} + 2q = \dfrac{20}{3}$，解得 $q = \dfrac{1}{3}$ 或 $q = 3$

当 $q = \dfrac{1}{3}$ 时，$a_1 = 18$，所以 $a_n = a_1 q^{n-1} = 18 \times (\dfrac{1}{3})^{n-1} = 2 \times 3^{3-n}$；

当 $q = 3$ 时，$a_1 = \dfrac{2}{9}$，所以 $a_n = a_1 q^{n-1} = \dfrac{2}{9} \times 3^{n-1} = 2 \times 3^{n-3}$.

例 6-4-5 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1 = 5$，$a_9 \cdot a_{10} = 100$，求 a_{18}.

【要点解析】已知的是项，基本方法是应用通项公式解决问题.

【解】 **方法一** 设等比数列的公比为 q，

则 $a_9 = a_1 q^8$，$a_{10} = a_1 q^9$

所以 $a_9 \cdot a_{10} = a_1 q^8 \cdot a_1 q^9 = a_1^2 q^{17} = 25q^{17} = 100$，得 $q^{17} = 4$

所以 $a_{18} = a_1 q^{17} = 5 \times 4 = 20$.

方法二 设等比数列的公比为 q，

则 $a_9 = a_1 q^8$，$a_{10} = a_1 q^9$

所以 $a_9 \cdot a_{10} = a_1 q^8 \cdot a_1 q^9 = a_1^2 q^{17} = a_1 \cdot a_1 q^{17} = a_1 \cdot a_{18} = 100$

所以 $a_{18} = 100 \div a_1 = 20$.

方法三 由等比数列的性质得：$a_1 a_{18} = a_9 a_{10}$ 即 $5a_{18} = 100$ 得 $a_{18} = 20$.

例 6-4-6 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1 > 0$，$a_2 a_4 + 2a_3 a_5 + a_4 a_6 = 25$，求 $a_3 + a_5$ 的值.



【解】因为 $a_2\,a_4=a_3^2$，$a_4\,a_6=a_5^2$，

所以由 $a_2\,a_4+2a_3\,a_5+a_4\,a_6=25$ 可得 $a_3^2+2a_3\,a_5+a_5^2=25$

即 $(a_3+a_5)^2=25$

所以 $a_3+a_5=\pm5$

因为 $a_1>0$，所以 $a_3=a_1q^2>0$ 且 $a_5=a_1q^4>0$，从而 $a_3+a_5=5$.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=3$，$q=-2$，求 a_6.

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_3=20$，$a_6=160$，求 a_n.

3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1+a_2+a_3=-3$，$a_1a_2a_3=8$，求 a_4 的值.

4. 在 243 和 3 中间插入三个数，使得这五个数成等比数列，求插入的三个数.

二、能力拓展

5. 成等差数列的三个数的和等于 18，并且这三个数分别加上 1，3，17 后成等比数列，求这三个数.

6. 在各项都是正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知公比 $q\neq1$，且 a_5，a_7，a_8 成等差数列，求公比 q.

【高考链接】

（2008 年单招试题）设 T_n 表示等比数列 $\{a_n\}$ 中前 n 项的积，$T_5=32$，则 $a_3=$_____.

6.5 等比数列（二）

【学习目标】

1．知识目标：（1）理解并掌握等比数列前 n 项和公式，并会应用公式解决简单的问题；
（2）熟练掌握等比数列通项公式与前 n 项和公式的综合应用，培养学生的运算能力．

2．能力目标：（1）培养学生观察分析、猜想归纳的能力；渗透类比与转化的思想；
（2）在领会函数与数列关系的前提下，渗透函数与方程的思想.

【知识精要】

1．等比数列前 n 项和的定义

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$.

2．等比数列前 n 项和的求法

错位相减.

3．等比数列前 n 项和的公式

当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$；当 $q\neq1$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$.

特别提醒 等比数列前 n 项和公式有两种形式，为此在求等比数列前 n 项和时，首先要判断公比 q 是否为 1，再由 q 的情况选择求和公式的形式，当不能判断公比 q 是否为 1 时，要对 q 分为 $q=1$ 和 $q\neq1$ 两种情形讨论求解.

【基础过关】

1．已知等比数列 2，4，8，16，…，求 $S_n=$_____.

2．在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=-4$，$q=\dfrac{1}{2}$，则 $S_{10}=$_____.

3．在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=81$，$a_5=16$，则 $S_5=$_____.

4．在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=1$，$a_k=243$，$q=3$，则 $S_k=$_____.

5．在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=1$，公比 $q=2$，数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和 $S_n=127$，求 n.

【典型例题】

例 6-5-1　在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$S_3=\frac{7}{2}$，$S_6=\frac{63}{2}$，求 a_n.

【要点解析】求通项公式问题，关键确定基本量 a_1 和 q.

【解】若 $q=1$，则 $S_6=2S_3$，与已知的 $S_3=\frac{7}{2}$，$S_6=\frac{63}{2}$ 矛盾，所以 $q\neq1$，从而

$$\begin{cases} S_3=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\dfrac{7}{2} \\ S_6=\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\dfrac{63}{2} \end{cases}$$

两式相除得 $1+q^3=9$

所以 $q=2$，由此得 $a_1=\frac{1}{2}$

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=\frac{1}{2}\times2^{n-1}=2^{n-2}$.

例 6-5-2　已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2a_n-1$.

（1）求证：数列 $\{a_n\}$ 是等比数列；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 通项公式 a_n 和前 n 项的和 S_n.

【要点解析】（1）由已知，令 $n=1$ 可求 a_1，利用 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$ 可得 $a_n=2a_{n-1}$，可证；

（2）由等比数列的通项公式及求和公式可求.

【证明】（1）当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2a_1-1$，

得 $a_1=1$

当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$，

$\because S_n=2a_n-1$，$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$

即 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$

$\therefore a_n=2a_{n-1}$　　$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$，易知 $n=1$ 时也成立.

$\therefore$数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列.

（2）由等比数列的通项公式及求和公式可得：$a_n=2^{n-1}$

$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$.

例 6-5-3　在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $S_n=48$，$S_{2n}=60$，求 S_{3n}.

【要点解析】本题可以考虑基本量法，也可以考虑等比数列的性质（设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，… 也成等比数列）求解.

【解】方法一　等比数列中，由 $S_n=48$，$S_{2n}=60$

$$\begin{cases} S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (1) \\ S_{2n}=\dfrac{a_1(1-q^{2n})}{1-q} & (2) \end{cases} \text{即得} \begin{cases} 48=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (1) \\ 60=\dfrac{a_1(1-q^{2n})}{1-q} & (2) \end{cases}$$

（2）式÷（1）式，得$\frac{5}{4}=(1+q^n)$

所以 $S_{3n}=\dfrac{a_1(1-q^{3n})}{1-q}=\dfrac{a_1(1-q^n)(1+q^n+q^{2n})}{1-q}=\dfrac{a_1(1-q^n)(1+2q^n+q^{2n}-q^n)}{1-q}$

$$=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}[(1+q^n)^2-q^n]=48\times[(\frac{5}{4})^2-\frac{1}{4}]=63.$$

方法二 ∵数列$\{a_n\}$为等比数列

∴S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$成等比数列；

∴$\dfrac{S_{3n}-S_{2n}}{S_{2n}-S_n}=\dfrac{S_{2n}-S_n}{S_n}$，即$\dfrac{S_{3n}-60}{60-48}=\dfrac{60-48}{48}$

∴$S_{3n}=63$.

例 6-5-4 已知等差数列$\{a_n\}$和公比为正数的等比数列$\{b_n\}$满足：$a_1=1, b_1=3, a_3+b_3=17$，$b_2-a_2=3$，求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

【要点解析】用首项和公差、首项和公比分别表示出两个条件，解关于公差和公比的方程组，求出公差和公比，再根据$a_1=1$，$b_1=3$即可求出两个数列的通项公式.

【解】由题意可设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q，

∵$a_1=1$，$b_1=3$，$a_3+b_3=17$，$b_2-a_2=3$

∴$\begin{cases} 1+2d+3q^2=17 \\ 3q-(1+d)=3 \end{cases}$，解得$q=2$或$q=-4$

又$q>0$，∴$q=2$，∴$d=2$

∴$a_n=2n-1$，$b_n=3\cdot 2^{n-1}$.

例 6-5-5 已知$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$成等差数列，求证：$a-\frac{b}{2}$，$-\frac{b}{2}$，$c-\frac{b}{2}$成等比数列.

【要点解析】本题涉及等比数列的证明，对三项成等比数列一般都利用中项或定义解决.

【证明】∵$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$成等差数列

∴$\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{a+c}{ac}$，即$2ac=b(a+c)$

∴$(a-\frac{b}{2})(c-\frac{b}{2})=ac-\frac{b}{2}(a+c)+\frac{b^2}{4}=\frac{b^2}{4}=(-\frac{b}{2})^2$

∴$a-\frac{b}{2}$，$-\frac{b}{2}$，$c-\frac{b}{2}$成等比数列.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 根据下列条件，求等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和 S_n：

（1）$a_1=3$，$q=2$，$n=6$；（2）$a_1=-1$，$q=-\frac{1}{3}$，$n=5$；（3）$a_1=8$，$q=\frac{1}{2}$，$a_n=\frac{1}{2}$.

2. 设 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和，且 $S_n=36$，$S_{2n}=42$，求 S_{3n}.

3. 设 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和，已知 $S_3=6$，$S_6=54$，求公比 q.

4. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_6-a_4=216$，$a_3-a_1=8$，$S_n=40$，求 q，a_1 和 n.

二、能力拓展

5. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，（1）已知 $a_1=-1.5$，$a_7=-96$，求 q 和 S_n；（2）已知 $q=\frac{1}{2}$，$S_5=-\frac{31}{8}$，求 a_1 和 a_n；（3）已知 $a_1=2$，$S_3=26$，求 q 和 a_n.

6. 设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，前n项和为S_n，若S_{n+1}，S_n，S_{n+2}成等差数列，求q的值.

7. 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公比是正数的等比数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，已知$a_1=1$，$b_1=3$，$a_3+b_3=17$，$T_3-S_3=12$，求$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式.

【高考链接】

（2011 年单招试题）已知数列$\{a_n\}$是公比为 q（$q>0$）的等比数列，其中$a_4=1$，且a_2，a_3，a_3-2成等差数列.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，求证：$S_n<16(n\in\mathbf{N}_+)$.

6.6 数列实际应用举例

【学习目标】

1. 知识目标：感知生活中的数列，了解数列与生活中有关实际问题的关系.
2. 能力目标：(1) 能主动联系生活中有关数列的应用问题，能结合数列知识解决实际问题；
(2) 在应用数列知识解决问题的过程中，培养学生勇于探索、积极进取的精神，激发学生学习数学的热情.

【知识精要】

1. 解决数列的应用问题必须准确探索问题所涉及的数列类型（如等差数列、等比数列或与等差、等比数列有关的数列）.

2. 求出数列的通项公式或建立递推关系式：

① 如果问题所涉及的数列是特殊数列（如等差数列、等比数列或与等差、等比数列有关的数列）应首先建立数列的通项公式.

② 如果问题所涉及的数列不是某种特殊数列，一般应考虑先建立数列的递推判断（即 a_n 与 a_{n-1} 的关系）.

【基础过关】

1. 某种细菌在培养过程中，每 20 分钟分裂一次（一个分裂为两个），经过 3 小时，这种细菌由 1 个可繁殖成_____个.

2. 1992 年底世界人口达到 54.8 亿，若人口的年平均增长率为 $x\%$，2000 年底世界人口数为 y（亿），那么 y 与 x 的函数关系式是_____.

3. 剧场有 20 排座位，后排比前排多 2 个座位，最后一排有 60 个座位，这个剧场共多少个座位？

4. 一种变速自行车后齿齿轮组由 5 个齿轮组成，它们的齿数成等差数列，其中最小齿轮和最大齿轮的齿数分别是 12 和 28，求中间三个齿轮的齿数.

【典型例题】

例 6-6-1 某种卷筒卫生纸绕在盘上，空盘时盘芯直径为 40mm，满盘时直径为 120mm，已知卫生纸的厚度为 0.1mm，问满盘时卫生纸的总长度大约有多少米（精确到 1m）？

【要点解析】卫生纸的厚度为 0.1mm，可以把绕在盘上的卫生纸近似地看作一组同心圆，然后分别计算各圆的周长，再求总和.

【解】据题意，由内向外的半径分别是 20.05，20.15，…，59.95

各圈的周长分别是 40.1π，40.3π，…，119.9π，120π

各圈的半径组成首项为 20.05，公差为 0.1 的等差数列，设圈数为 n，则

$59.95=20.05+(n-1)\times 0.1$，解得 $n=400$

各圈的周长组成一个首项为 40.1π，公差为 0.2π，项数为 400 的等差数列.

根据等差数列的求和公式，得

$$S=400\times 40.1\pi+\frac{400(400-1)}{2}\times 0.2\pi=32000\pi\text{mm}\approx 100\text{m}$$

答：满盘时卫生纸的总长度大约为 100 米.

例 6-6-2 用分期付款的方式购买家电一件，单价为 1150 元，购买当天先付 150 元，以后每月的这一天都交付 50 元，并加付欠款利息，月利率为 1%，若交付 150 元后的一个月开始算分期付款的第一个月，问分期付款的第 10 个月该交付多少钱？全部贷款付清后，买这件家用电器实际花费多少钱？

【解】购买时付出 150 元后，余欠款 1000 元，按题意应分 20 次付清，由于每次都必须交 50 元，外加上所欠余款的利息，这样每次交付欠款的数额顺月次构成一数列. 设每次交款数额依次为 a_1，a_2，…，a_{20}.

则：$a_1=50+1000\times 1\%=60$ 元

$a_2=50+(1000-50)\times 1\%=59.5$ 元

…

$a_{10}=50+(1000-9\times 50)\times 1\%=55.5$ 元

即第 10 个月应付款 55.5 元.

由于 $\{a_n\}$ 是以 60 为首项，以 −0.5 为公差的等差数列，

所以有：$S_{20}=60+(60-19\times 0.5)2\times 20=1105$ 元

即全部付清后实际付款（1105 + 150）= 1255 元.

例 6-6-3 某企业进行技术改造，有两种方案，甲方案：一次性贷款 10 万元，第一年便可获利 1 万元，以后每年比前一年增加 30%的利润. 乙方案：每年贷款 1 万元，第一年可获利 1 万元，以后每年比前一年增加 5 千元. 两种方案的使用期都是 10 年，到期一次性归还本息，若银行两种形式的贷款都按年息 5%的复利计算，试比较两种方案中，哪种获利更多？

【解】甲方案是等比数列，乙方案是等差数列.

① 甲方案获得：$1+(1+30\%)^2+\cdots+(1+30\%)^9=\dfrac{1.3^{10}-1}{0.3}\approx 42.63$ 万元

银行贷款本息：$10(1+5\%)^{10}\approx 16.29$ 万元

故甲方案纯利：$42.63-16.29=26.34$ 万元



② 乙方案获得：$1+(1+0.5)+(1+2\times0.5)+\cdots+(1+9\times0.5)=10\times1+45\times0.5=32.50$ 万元

银行本息和：$1.05\times[1+(1+5\%)+(1+5\%)^2+\cdots+(1+5\%)^9]=1.05\times\dfrac{1.05^{10}-1}{0.05}\approx13.21$ 万元

故乙方案纯利：$32.50-13.21=19.29$ 万元

综上所述，甲方案更好.

【点评】本例题是比较简单的数列应用问题，由于问题所涉及的数列是熟悉的等比数列与等差数列，因此只是建立通项公式并运用所学过的公式求解.

例 6-6-4　某地现有耕地 10000 公顷，规划 10 年后粮食单产比现在增加 22%，人均粮食占有量比现在提高 10%，如果人口年增长率为 1%，那么耕地平均每年至多只能减少多少公顷？（精确到 1 公顷）

（粮食单产$=\dfrac{\text{总产量}}{\text{耕地面积}}$，人均粮食占有量$=\dfrac{\text{总产量}}{\text{总人口数}}$）.

【解】在问题中，人口增长为等比数列，而土地减少成等差数列，设耕地每年至多只能减少 x 公顷，且该地区现在人口为 p，粮食单产为 M 吨/公顷. 所以 10 年后粮食单产 $M(1+22\%)$，耕地为 10^4-10x，人口为 $p\times(1+10\%)^{10}$.

据题意得　$\dfrac{M(1+22\%)(10^4-10x)}{p\times(1+10\%)^{10}}\geqslant\dfrac{M\times10^4}{p}(1+10\%)$

$$\therefore 10^4-10x\geqslant\frac{10^4\times1.1\times(1+0.01)^{10}}{1.22}$$

$$\therefore x\leqslant10^3\left[1-\frac{1.1\times(1+0.01)^{10}}{1.22}\right]=10^3\left[1-\frac{55}{61}\times(1+0.01)^{10}\right]$$

$$\therefore x\leqslant1000-\frac{55}{61}\times1104.5\approx4.1$$

得 $x\leqslant4$

故每年至多只能减少耕地 4 公顷.

例 6-6-5　某地区森林原有木材存量为 a，且每年增长率为 25%，因生产建设的需要，每年年底要砍伐的木材量为 b，设第 n 年后该地区森林木材的存量为 a_n.

（1）求 a_n 的表达式；

（2）为保护生态环境，防止水土流失，该地区每年的森林木材存量不少于 $\dfrac{7}{9}a$，如果 $b=\dfrac{19}{72}a$，那么该地区今后会发生水土流失吗？若会，需要经过几年？

【解】（1）设第一年的森林木材的存量为 a_1，第 n 年后的森林木材的存量为 a_n，则

$$a_1=a\left(1+\frac{1}{4}\right)-b=\frac{5}{4}a-b$$

$$a_2=\frac{5}{4}a_1-b=\left(\frac{5}{4}\right)^2a-\left(\frac{5}{4}+1\right)b$$

$$a_3=\frac{5}{4}a_2-b=\left(\frac{5}{4}\right)^3a-\left[\left(\frac{5}{4}\right)^2+\frac{5}{4}+1\right]b$$

$$a_n=\left(\frac{5}{4}\right)^n a-\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}+\left(\frac{5}{4}\right)^{n-2}+\cdots+\frac{5}{4}+1\right]b$$

$$=\left(\frac{5}{4}\right)^n a-4\left[\left(\frac{5}{4}\right)^n-1\right]b\ (n\in\mathbf{N}^*).$$

（2）当 $b=\frac{19}{72}a$ 时，有 $a_n<\frac{7}{9}a$，

得 $\left(\frac{5}{4}\right)^n a-4\left[\left(\frac{5}{4}\right)^n-1\right]\times\frac{19}{72}a<\frac{7}{9}a$

即 $\left(\frac{5}{4}\right)^n>5$

所以 $n>\frac{\lg 5}{\lg 5-2\lg 2}=\frac{1-\lg 2}{1-3\lg 2}\approx 7.2$

答：经过 8 年后该地区就开始水土流失.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 某商店的售货员在货架上用三角形排列的方式展示一种听装饮料，底层放置 15 个，第二层放置 14 个，第三层放置 13 个……顶层放置 1 个，这样摆法他需要多少听饮料？

2. 某轿车新车的售价为 36 万元，年折旧率为 10%（就是说每年减少它价值的 10%），那么该车从购买当年起，大约购车后第几年，该车价值只有新车的一半？

3. 互联网中某种计算机病毒通过电子邮件传播，每月爆发一次，第一次爆发可以感染 8 台计算机，以后每次爆发每一台计算机可以感染 10 台其他计算机，那么第 5 个月，该种病毒可以感染多少台计算机？

4. 我国 1980 年底人口以 10 亿计算（1）若人口增长率为 1.2%，则到 2005 年底我国人口约多少？（2）要是我国到 2010 年底人口不超过 14 亿，那么人口年平均增长率最高是多少？

二、能力拓展

5. 教育储蓄是一种零存整取的定期储蓄存款，它享受整存整取利率，且免除利息税. 它有 1 年、3 年、6 年三种存期，起存金额 50 元，存款总额不超过 2 万元。教育储蓄的对象为在校四年级（含四年级）以上的学生。假设零存整取 3 年期教育储蓄的月利率为 2.1‰.

（1）欲在 3 年后一次支取本息合计 2 万元，每月大约存入多少元？

（2）零存整取 3 年期教育储蓄每月至多存入多少元？此时 3 年后本息合计为多少（精确到 1 元）？

6. 某人 2004 年初向银行申请个人住房公积金贷款 20 万元用于购买住房，月利率 3.375%，按复利计算，每月等额还贷一次，并从贷款后的次月初开始还贷. 如果 10 年还清，那么每月应还贷多少元？

7. 某人创业，向银行贷款，有两种方案. 甲方案：一次性贷款 10 万元，第一年可获利 1 万元，以后每年比上年增加 30%的利润. 乙方案：每年贷款 1 万元，第一年可获利 1 万元，以后每年比上年增加利润 0.5 万元，两种方案使用期为 10 年，到期一次性还本付息，若银行

贷款利率均按年息 10%的复利计算，试比较两种方案的优劣.

【高考链接】

（2007 年单招试题改编）随着人们生活水平地不断提高，私家车也越来越普及，某人购买了一辆价值 15 万元的汽车，每年应交保险费、养路费及消耗汽油费合计 12 000 元，汽车的维修费为：第一年 3000 元，第二年 6000 元，第三年 9000 元，依此逐年递增（成等差数列）. 求汽车使用 n 年时，年平均费用 y_n（万元）的表达式.

本章小结与复习

【知识结构】

- 数列
 - 数列的概念
 - 定义
 - 项、通项公式 a_n
 - 前 n 项的和 S_n 与通项公式 a_n 的关系
 - 数列的表示方法
 - 数列的分类
 - 等差、等比数列
 - 定义
 - 通项公式 a_n
 - 前 n 项的和 S_n 的公式
 - 性质
 - 特殊数列（非等差、等比数列）求和
 - 数列的应用举例

【考纲解读】

数列是高中数学的重点学习内容之一，它既具有相对其他内容的独立性，又具有一定的综合性和灵活性. 数列是一类特殊的函数，所以，它兼有了函数的若干特性. 在学习中要特别注重在公式基础上的一些性质的应用，所以数列对运算能力和思维能力及数列模型的应用能力具有一定的要求. 在高考中，不仅以选择题出现，还常以解答题的面目呈现.

考　点	要　求
数列的概念	了　解
等差数列	理　解
等比数列	理　解
等差、等比数列应用举例	掌　握

【考题剖析】

例 6-1　（2001 年单招试题）已知数列 $\{a_n\}$，其中 $a_n>0$. S_n 为前 n 项和，对于任意的自然数 $n\geqslant 1$，a_n 与 2 的等差中项等于 S_n 与 2 的等比中项.

（1）求 a_1，a_2 的值；（2）证明：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

【剖析】本题已知条件中涉及等差数列和等比数列中项的概念，数列前 n 项和 S_n 和通项 a_n 的关系，以及等差数列的证明，属于数列中的综合题.

【解答】（1）根据题意 a_n 与 2 的等差中项等于 S_n 与 2 的等比中项，可得

$$\frac{a_n+2}{2}=\pm\sqrt{2S_n}\text{，即 }\frac{(a_n+2)^2}{8}=S_n$$

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1$，得 $a_1=2$

当 $n=2$ 时，$\dfrac{(a_2+2)^2}{8}=S_2=2+a_2$，$a_2>0$ 解得 $a_2=6$.

（2）由 $\dfrac{(a_n+2)^2}{8}=S_n$ 和 $a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2)\end{cases}$ 得

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{(a_n+2)^2}{8}-\dfrac{(a_{n-1}+2)^2}{8}$

$\therefore (a_n-2)^2=(a_{n-1}+2)^2$

又 $\because a_n>0$

$\therefore a_n-a_{n-1}=4$（常数），易知 $n=1$ 时成立.

$\therefore \{a_n\}$ 是以 2 为首项，以 4 为公差的等差数列.

例 6-2　（2009 年单招试题）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，对一切 $n\in\mathbf{N}_+$，点 $\left(n,\dfrac{S_n}{n}\right)$ 均在函数 $f(x)=3x+2$ 的图像上.

（1）求 a_1，a_2 及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）解不等式 $f(n)\geqslant S_n-22$.

【剖析】本题涉及数列和函数，入手点应该在点 $\left(n,\dfrac{S_n}{n}\right)$ 均在函数 $f(x)=3x+2$ 的图像上.

【解答】（1）由题意得 $\frac{S_n}{n}=3n+2$，所以 $S_n=3n^2+2n$，

所以 $a_1=S_1=3+2=5$，$a_2=S_2-S_1=3\times2^2+2\times2-5=11$.

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(3n^2+2n)-[3(n-1)^2+2(n-1)]=6n-1$；

当 $n=1$ 时，$a_1=5=6\times1-1$；

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=6n-1$.

（2）因为 $f(n)\geqslant S_n-22$

所以 $3n+2\geqslant3n^2+2n-22$，所以 $3n^2-n-24\leqslant0$，所以 $-\frac{8}{3}\leqslant n\leqslant3$

因为 $n\in\mathbf{N}_+$，所以 $n=1$，2，3.

例 6-3 （2012 年单招试题）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=n^2-n$，$n\in\mathbf{N}_+$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=2^{a_n}+1$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

【剖析】本题未给定数列的种类，但从前 n 项和为 $S_n=n^2-n$ 应能够确定数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【解答】（1）当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1^2-1=0$

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2-n)-[(n-1)^2-(n-1)]$

$=2n-2$

综上所述得 $a_n=2n-2$，$n\in\mathbf{N}_+$.

（2）$b_n=2^{a_n}+1=2^{2n-2}+1=4^{n-1}+1$，

$T_n=(1+4+4^2+\cdots+4^{n-1})+n$

$=\frac{1\times(1-4^n)}{1-4}+n=\frac{4^n}{3}+n-\frac{1}{3}$.

【巩固提高】

一、强化训练

1.（2002 年单招试题）在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_9=-2$，则此数列前 17 项的积等于（　　）

A．2^{16}　　B．-2^{16}　　C．2^{17}　　D．-2^{17}

2.（2006 年单招试题）若数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$，则其前 10 项的和 $S_{10}=$（　　）

A．$\frac{9}{10}$　　B．$\frac{11}{10}$　　C．$\frac{10}{9}$　　D．$\frac{10}{11}$

3.（2005 年单招试题）若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n$，则 $S_n=$_____.

4．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_2+a_8=6$，$a_3a_7=-16$，求数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和.

5. 等差数列$\{a_n\}$的公差为$d=\frac{1}{2}$，$S_{100}=145$，求$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}$的值.

6. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$，（1）求证：数列$\{a_n+1\}$是等比数列；（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式.

7. （2003年单招试题）已知数列$\{a_n\}$为等比数列，$b_n=\log_{\frac{1}{2}}a_n$，$b_2+b_4=12$，$b_3+b_5=16$.（1）求$\{b_n\}$的通项公式；（2）求$\{b_n\}$的前100项和.

二、能力拓展

8. 在等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=2$且$a_5a_{2n-5}=2^{2n}(n\geqslant 3)$，求$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_n$.

9. 已知数列$\{a_n\}$是首项为19，公差为–4的等差数列，设S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和.

（1）求通项a_n及S_n；

（2）设$\{b_n-a_n\}$是首项为1，公比为2的等比数列，求数列$\{b_n\}$的通项公式及其前n项和T_n.

10. 在数列$\{a_n\}$中，已知a_1=3，对所有正整数n，以a_n，a_{n+1}为系数的一元二次方程$a_nx^2-2a_{n+1}x+1=0$都有实数根α、β，且满足（α–1）（β–1）=2，（1）求证：数列$\left\{a_n-\frac{1}{3}\right\}$是等比数列；（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式.

第 7 章　平面向量

7.1　平面向量的概念

【学习目标】

1．知识目标：理解向量的概念，掌握向量的几何表示；理解向量相等、相反的概念，理解平行向量的含义．

2．能力目标：通过观察、比较、猜想、分析、归纳、类比、概括，培养思维能力及数形结合的能力．

【知识精要】

1．向量的概念

既有大小又有方向的量称为向量．

注意 数量与向量的区别：数量只有大小，是一个代数量；向量有方向，有大小．

2．向量的表示方法，如图 7-1-1 所示

① 用有向线段表示；

② 用字母 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 等表示；

③ 用有向线段的起点与终点字母表示：$\overrightarrow{AB}$．

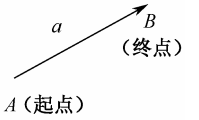


图 7-1-1　向量的表示方法

3．向量的模

向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小称为向量的模（长度），记作$|\overrightarrow{AB}|$.

4．零向量、单位向量概念

① 长度为 0 的向量称为零向量，记作 $\vec{0}$，$\vec{0}$ 的方向是任意的．

注意 $\vec{0}$ 与 0 的区别．

② 长度为 1 个单位长度的向量，称为单位向量，记作 $\vec{e}$．

注意 零向量、单位向量的定义都是只限制大小，不确定方向．

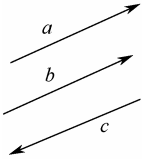


图 7-1-2

5．平行向量、共线向量定义，如图 7-1-2 所示

① 方向相同或相反的非零向量称为平行向量，平行向量即共线向量．

向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 平行或共线，记作 $\vec{a}\ //\ \vec{b}$．

② 我们规定 $\vec{0}$ 与任一向量平行，即 $\vec{0}//\vec{a}$.

6．相等（相反）向量定义

长度相等且方向相同（相反）的向量称为相等（相反）向量. 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相等，记作 $\vec{a}=\vec{b}$；向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相反，记作 $\vec{a}=-\vec{b}$.

【基础过关】

判断下列命题是否正确：

（1）向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 是共线向量，则 A、B、C、D 四点必在一直线上. （ ）

（2）单位向量都相等. （ ）

（3）任一向量与它的相反向量不相等. （ ）

（4）四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. （ ）

（5）$\vec{0}$ 的模为 0，但方向不确定. （ ）

（6）向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同. （ ）

【典型例题】

例 7-1-1 如图 7-1-3 所示，设矩形 $ABCD$ 的边长为 2 和 3，其所有边及对角线能构成多少向量？这些向量的模是多少？

【要点解析】本题考查向量的基本概念，要正确理解向量的概念.

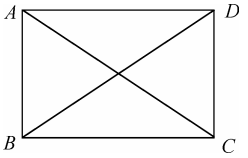


图 7-1-3

【解】 $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

所有边及对角线构成的向量有：$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$；$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DA}$；$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CA}$；$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{BC}$；$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{BD}$；$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DC}$.

它们的模分别是：$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BA}|=2$；$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{DA}|=3$；$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{13}$；

$|\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{BC}|=3$；$|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{DC}|=2$；$|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{13}$.

例 7-1-2 如图 7-1-4 所示，设 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，分别写出图中与向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 相等的向量.

【要点解析】相等向量指大小相等且方向相同.

【解】与向量 $\overrightarrow{OA}$ 相等的向量有：$\overrightarrow{DO}$、$\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{EF}$；

与向量 $\overrightarrow{OB}$ 相等的向量有：$\overrightarrow{EO}$、$\overrightarrow{FA}$、$\overrightarrow{DC}$；

与向量 $\overrightarrow{OC}$ 相等的向量有：$\overrightarrow{FO}$、$\overrightarrow{ED}$、$\overrightarrow{AB}$.

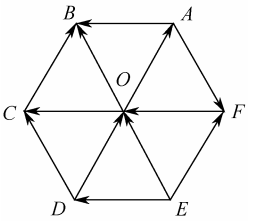


图 7-1-4

【巩固提高】

一、强化训练

1．下列说法中错误的是（　　）

A. $\vec{0}$ 是没有方向的　　B. $\vec{0}$ 的长度为 0

C. $\vec{0}$ 与任一向量平行　　D. $\vec{0}$ 的方向是任意的

2．下列命题正确的是（　　）

A. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 是两平行向量.

B. 若向量 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 都是单位向量，则 $\vec{a}=\vec{b}$.

C. 若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，则 A、B、C、D 四点构成平行四边形.

D. 两向量相等的充要条件是它们的始点、终点相同.

3．把平面上一切单位向量的始点放在同一点，那么这些向量的终点所构成的图形是（　　）

A. 一条线段　　B. 一段圆弧　　C. 圆上一群孤立点　　D. 一个单位圆

4．在△ABC 中，$AB=AC$，D、E 分别是 AB、AC 的中点，则（　　）

A. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线　B. $\overrightarrow{DE}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 共线　　C. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AE}$ 相等　　D. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 相等

5．已知非零向量 $\vec{a}\ /\!/\ \vec{b}$，若非零向量 $\vec{c}\ /\!/\ \vec{a}$，则 $\vec{c}$ 与 $\vec{b}$ 必定_____.

6. 已知 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 是两非零向量，且不共线，若非零向量 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 共线，则 $\vec{c}$ 与 $\vec{b}$ 必定_____.

二、能力拓展

7．在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$，则四边形 $ABCD$ 是_____.

8．已知 $|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{AC}|=1$，若 $\angle BAC=60°$，则 $|\overrightarrow{BC}|=$_____.

【高考链接】

（2008 年单招试题）下列说法正确的是（　　）

A．平行向量就是向量所在直线平行的向量　　B．长度相等的向量叫做相等向量

C．共线向量是指在一条直线上的向量　　D．$\vec{0}$ 与任一向量共线

7.2　平面向量的加法、减法和数乘向量（一）

【学习目标】

1．知识目标：掌握向量的加法、减法运算，会作两个向量的和、差向量.

2．能力目标：通过变式训练，培养逻辑思维能力，通过训练养成学生规范的作图习惯，培养学生数形结合的能力.

【知识精要】

1．向量的加法

（1）求两个向量和的运算，叫做向量的加法.

（2）作图：三角形法则（首尾相接，首尾连）和平行四边形法则（对于共线向量不适用）.

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

（3）向量加法的运算法则：交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；　结合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

2．向量的减法

（1）若$\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$，则$\vec{x}$叫做$\vec{a}$与$\vec{b}$的差，记作$\vec{a}-\vec{b}$.

（2）已知向量$\vec{a}$与$\vec{b}$，在平面内取一点O，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$. 即$\vec{a}-\vec{b}$（差向量）为：向量$\vec{a}$，$\vec{b}$共起点，从向量$\vec{b}$（减向量）的终点指向向量$\vec{a}$（被减向量）的终点的向量（首首相接，尾尾连）.

【基础过关】

1．若C是线段AB的中点，则$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=$_____.

2．在$\square ABCD$中，设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{BD}=\vec{d}$，则$\vec{a}+\vec{b}=$_____，$\vec{a}+\vec{d}=$_____，$\vec{b}-\vec{d}=$_____.

3．化简：

（1）$\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PS}$；　　（2）$\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PT}+\overrightarrow{QS}+\overrightarrow{ST}$.

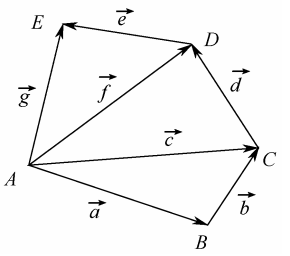


图 7-2-1

4．根据图 7-2-1 所示填空：

（1）$\vec{a}+\vec{b}=$_____；　　（2）$\vec{c}+\vec{d}=$_____；

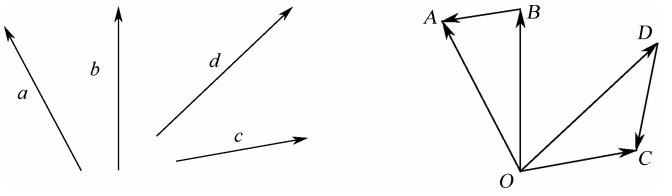
（3）$\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}=$_____；　　（4）$\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}=$_____.

【典型例题】

例 7-2-1　如图 7-2-2（a）所示，已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$，求作向量$\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{c}-\vec{d}$.

【要点解析】向量的加法是首尾相接，首尾连；向量的减法是首首相接，尾尾连.

【解】如图 7-2-2（b）所示，在平面上取一点O，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$，作$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{DC}$，则$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{DC}=\vec{c}-\vec{d}$.



（a）　　（b）

图 7-2-2

例 7-2-2　在□$ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.（1）用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DB}$；（2）当 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足什么条件时，四边形 $ABCD$ 是菱形？（3）当 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足什么条件时，$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$?

【要点解析】要熟练掌握平行四边形法则，理解菱形、矩形的定义与性质.

【解】（1）如图 7-2-3 所示，由平行四边形法则得

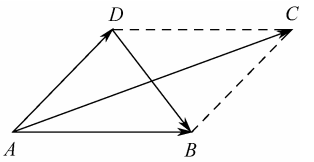


图 7-2-3

$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\vec{a}-\vec{b}$

（2）当$|\vec{a}|=|\vec{b}|$时，四边形 $ABCD$ 为菱形.

（3）当 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 互相垂直（$ABCD$ 为矩形）时，$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$.

【巩固提高】

一、强化训练

1．下列等式中一定能成立的是　（　　）

A．$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$　　B．$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$　　C．$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$　　D．$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$

2．化简 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SP}$ 的结果等于　（　　）

A．$\overrightarrow{QP}$　　B．$\overrightarrow{OQ}$　　C．$\overrightarrow{SP}$　　D．$\overrightarrow{SQ}$

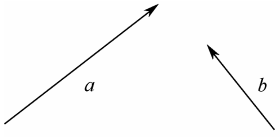
3．在△ABC 中，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{AB}$ 等于　（　　）

A．$\vec{a}+\vec{b}$　　B．$-\vec{a}-\vec{b}$　　C．$\vec{a}-\vec{b}$　　D．$\vec{b}-\vec{a}$

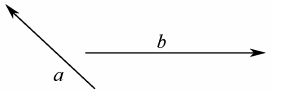
4．已知 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，若$|\overrightarrow{OA}|=12$，$|\overrightarrow{OB}|=5$，且$\angle AOB=90^\circ$，则$|\vec{a}-\vec{b}|=$_____.

5．求作下列向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的差向量$\vec{c}$.

（1）



（2）



二、能力拓展

6．已知 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是非零向量，则$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$时，应满足条件_____.

7. 如图 7-2-4 所示，在四边形 $ABCD$ 中，根据图示填空：

$\vec{a}+\vec{b}=$_____，$\vec{b}+\vec{c}=$_____，

$\vec{c}-\vec{d}=$_____，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}=$_____.

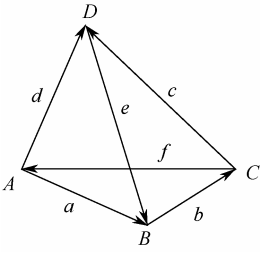


图 7-2-4

7.3 平面向量的加法、减法和数乘向量（二）

【学习目标】

1．知识目标：能描述向量数乘运算的含义，会用代数式表示向量的数乘运算.
2．能力目标：培养学生的计算能力和逻辑思维能力.

【知识精要】

1．向量的加法

（1）求两个向量和的运算，叫做向量的加法.

（2）作图：一般有两种方法，即向量加法的三角形法则（“首尾相接，首尾连”）和平行四边形法则（对于共线向量不适用）.

（3）向量加法的运算法则：交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；结合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

2．向量的减法

（1）若$\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$，则$\vec{x}$称为$\vec{a}$与$\vec{b}$的差，记作$\vec{a}-\vec{b}$.

（2）已知向量$\vec{a}$与$\vec{b}$，在平面内取一点O，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$.即$\vec{a}-\vec{b}$（差向量）为：向量$\vec{a}$、$\vec{b}$共起点，从向量$\vec{b}$（减向量）的终点指向向量$\vec{a}$（被减向量）的终点的向量（首首相接，尾尾连）.

3．向量的数乘运算

实数λ与向量$\vec{a}$的积是一个向量，叫做向量的数乘，记作$\lambda\vec{a}$，它的长度和方向规定如下：

（1）$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$；（2）当$\lambda>0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$方向相同；当$\lambda<0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$方向相反；当$\lambda=0$时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

4．数乘运算律

设$\vec{a}$、$\vec{b}$为任意向量，λ、μ为任意实数，则有：

$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$，$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$，$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

5．向量共线定理

向量$\vec{b}$与非零向量$\vec{a}$共线的充要条件是：有且只有一个非零实数λ，使$\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

【基础过关】

1．已知下列命题：

（1）向量$\lambda\vec{a}$的模等于向量$\vec{a}$的模的λ倍；

（2）$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$平行，当$\lambda>0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同向；当$\lambda<0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$反向；

（3）$-2\vec{a}+\vec{b}=-2\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$；

（4）如果点 M 是线段 AB 的中点，点 O 是平面上任意一点，那么 $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

其中正确的是（　　）

A．（1）（2）　　B．（2）（3）　　C．（3）（4）　　D．（2）（4）

2．化简下列各式：

（1）$3\left(-\vec{a}+2\vec{b}\right)-\left(5\vec{a}-\vec{b}\right)$；　　（2）$\frac{1}{2}(\vec{a}-2\vec{b})-2(\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c})$.

3．已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 60°，且 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，试作下列向量：

（1）$2\vec{a}+\vec{b}$；　　（2）$\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

【典型例题】

例 7-3-1　如图 7-3-1 所示已知 E、F 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 的中点，用向量法证明：$EF\,//\,BC$ 且 $EF=\frac{1}{2}BC$.

【要点解析】本题首先将 E、F 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 的中点翻译成向量语言：$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. 要证明 $EF\,//\,BC$ 且 $EF=\frac{1}{2}BC$ 转化为向量语言，即证明 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

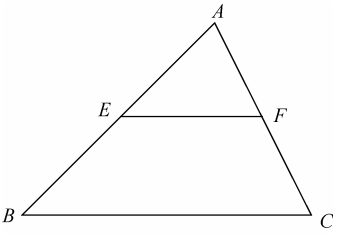


图 7-3-1

【证明】∵ E、F 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 的中点，

$\therefore \overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

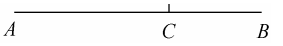
又∵ $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

因此，$EF // BC$ 且 $EF=\frac{1}{2}BC$.

例 7-3-2 点 C 在线段 AB 上，且 $\frac{AC}{CB}=\frac{5}{2}$，则 $\overrightarrow{AC}=$ ___ $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}=$ ____ $\overrightarrow{AB}$.

【要点解析】数乘向量要注意两个向量的大小和方向的关系.

【解】如图所示



∵ $\frac{AC}{CB}=\frac{5}{2}$

$\therefore AC=\frac{5}{7}AB$，$BC=\frac{2}{7}AB$

$\therefore \overrightarrow{AC}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$.

例 7-3-3 如图 7-3-2 所示□$ABCD$ 的两条对角线交于点 O，若 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{DO}$.

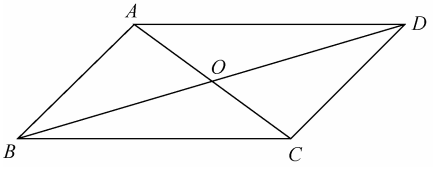


图 7-3-2

【要点解析】利用向量加法的平行四边形法则和数乘运算进行计算.

【解】$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$，$\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 已知 $ABCD$ 是等腰梯形，AD、BC 是腰，$AB=2CD$，若 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{AD}=$（　　）

A．$2\vec{a}+\vec{b}$　　B．$\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$　　C．$\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$　　D．$\vec{b}-2\vec{a}$

2．若非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$（　　）

A．垂直　　B．同向　　C．反向　　D．同向或反向

3．M 是线段 AB 的中点，O 是坐标原点，则 $\overrightarrow{OM}$ 等于　　（　　）

A．$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$　　B．$\frac{1}{2}$（$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$）　　C．$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$　　D．$\frac{1}{2}$（$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$）

4．化简：$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AD}=$_____.

二、能力拓展

5．已知 A、B、C 三点共线，且 $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{CB}$，则 $\overrightarrow{AB}=$____ $\overrightarrow{CA}$.

6．在△ABC 中，点 E、F 分别在边 AC、BC 上，且 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$．用向量法证明：$\overrightarrow{EF}\ /\!/\ \overrightarrow{AB}$.

7.4　平面向量的坐标运算

【学习目标】

1．知识目标：理解平面向量的坐标的概念；掌握平面向量的坐标运算；会根据向量的坐标，判断向量是否共线.

2．能力目标：让学生进一步体会数形结合思想，认识事物之间的相互联系，培养学生辨证思维能力.

【知识精要】

1．平面向量的坐标表示

如图 7-4-1 所示，在直角坐标系内，我们分别取与 x 轴，y 轴方向相同的两个单位向量 $\vec{i}$，$\vec{j}$ 作为基底，任作一个向量 $\vec{a}$，由平面向量基本定理可知，有且只有一对实数 x，y，使得

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j} \qquad ①$$

我们把 $(x,\ y)$ 称为向量 $\vec{a}$ 的（直角）坐标，记作

$$\vec{a}=(x,\ y) \qquad ②$$

其中 x 叫做 $\vec{a}$ 在 x 轴上的坐标，y 叫做 $\vec{a}$ 在 y 轴上的坐标，②式叫做向量 $\vec{a}$ 的坐标表示.

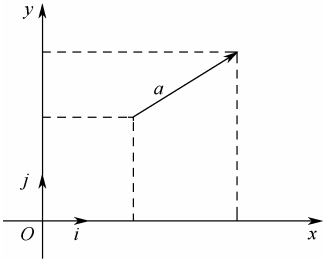


图 7-4-1

如图 7-4-2 所示，在直角坐标平面内，以原点 O 为起点作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，则点 A 的位置由 $\vec{a}$ 唯一确定.

设 $\overrightarrow{OA}=x\vec{i}+y\vec{j}$，则向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标 $(x,\ y)$ 就是点 A 的坐标；反过来，点 A 的坐标 $(x,\ y)$ 也就是向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标，因此，在平面直角坐标系内，每一个平面向量都可以用一对有序实数唯一表示.

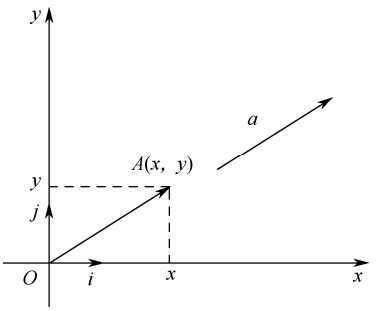


图 7-4-2

2．平面向量的坐标运算

（1）若 $\vec{a}=(x_1,\ y_1)$，$\vec{b}=(x_2,\ y_2)$，则 $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$，$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$.

两个向量和与差的坐标分别等于这两个向量相应坐标的和与差.

（2）若 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$.

向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点坐标减去始点坐标.

（3）若 $\vec{a}=(x,\ y)$ 和实数 λ，则 $\lambda\vec{a}=(\lambda x,\ \lambda y)$.

实数与向量的积的坐标等于用这个实数乘以原来向量的相应坐标.

（4）向量共线的充要条件有两种形式：

$\vec{a}//\vec{b}\ (\vec{b}\neq\vec{0})\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

（5）已知 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$，其坐标为 $\vec{a}=(x,\ y)$，则其模为 $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

【基础过关】

1．已知 $\vec{a}=(2,\ 4)$，$\vec{b}=(1,\ m)$，若 $\vec{a}\ //\ \vec{b}$，则 $m=$（　　）

A．-2　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　C．2　　D．4

2．已知平面向量 $\vec{a}=(1,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ -1)$，则向量 $\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{3}{2}\vec{b}=$（　　）

A．$(-2,\ -1)$　　B．$(-2,\ 1)$　　C．$(-1,\ 2)$　　D．$(1,\ 2)$

3．已知 $A(x,\ 2)$，$B(5,\ y-2)$，若 $\overrightarrow{AB}=(4,\ 6)$，则 $x=$_____，$y=$_____.

4．如果 $\vec{a}=(-2,\ 3)$，$\vec{b}=(x,\ -6)$ 且 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $x=$ _____，$\vec{a}-\vec{b}=$_____.

【典型例题】

例 7-4-1　（1）若向量 $\vec{a}=(-1,\ x)$ 与 $\vec{b}=(-x,\ 2)$ 共线且方向相同，求 x.

（2）已知 $A(-2,\ 1)$，$B(0,\ k)$，$C(k-2,\ 4)$，若 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{BC}$，求 k 的值.

【要点解析】若共线向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，则 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ 或 $x_1y_2-x_2y_1=0$（坐标形式）. 当 $\lambda>0$ 时，$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 同方向，反之，方向相反.

【解】（1）$\because \vec{a}=(-1,\ x)$ 与 $\vec{b}=(-x,\ 2)$ 共线

$\therefore (-1)\times 2-x\cdot(-x)=0$，$\therefore x=\pm\sqrt{2}$

当 $x=\sqrt{2}$ 时，$\vec{b}=\sqrt{2}\vec{a}$，这时 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同

当 $x=-\sqrt{2}$ 时，$\vec{b}=-\sqrt{2}\vec{a}$，这时 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反

$\therefore x=\sqrt{2}$.

（2）$\because \overrightarrow{AB}=(2,\ k-1)$，$\overrightarrow{BC}=(k-2,\ 4-k)$

又 $\because \overrightarrow{AB}//\overrightarrow{BC}$

$\therefore 2\times(4-k)-(k-1)\times(k-2)=0$

$\therefore k=-2$ 或 $k=3$.

例 7-4-2　若 $M(3,-2)$，$N(-5,-1)$ 且 $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$，求 P 点的坐标.

【要点解析】要求 P 点坐标，可用待定系数法，先设 P 点坐标，由向量关系式，得到两个方程，求得 P 点的坐标.

【解】设 $P(x,\ y)$，由题意得 $(x-3,\ y+2)=\frac{1}{2}(-8,\ 1)$

即 $(x-3,\ y+2)=(-4,\ \frac{1}{2})$

$$\begin{cases} x-3=-4 \\ y+2=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$\therefore P$ 点坐标为 $(-1,\ -\frac{3}{2})$.

例 7-4-3　若 $A(-1,\ -1)$，$B(1,\ 3)$，$C(2,\ 5)$，求证：A，B，C 三点共线.

【要点解析】要证明三点共线，转化为向量表示，就是证明向量 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AC}$.

【证明】$\overrightarrow{AB}=(1+1,\ 3+1)=(2,\ 4)$，$\overrightarrow{AC}=(2+1,\ 5+1)=(3,\ 6)$

$\because 2\times 6-4\times 3=0$

$\therefore \overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AC}$

即 A，B，C 三点共线.

【巩固提高】

一、强化训练

1．已知$\vec{a}=(-1,-2)$，$\vec{b}=(x+2,1)$，且$\vec{a}\parallel\vec{b}$，则$x=$（　　）

A．–4　　B．$-\frac{3}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．4

2．已知$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(x,1)$，且$\vec{a}+2\vec{b}$与$2\vec{a}-\vec{b}$平行，则$x=$（　　）

A．1　　B．2　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{3}$

3．已知向量$\vec{a}=$（3，4），$\vec{b}=(\sin\alpha,\cos\alpha)$且$\vec{a}\parallel\vec{b}$，则$\tan\alpha=$（　　）

A．$\frac{3}{4}$　　B．$-\frac{3}{4}$　　C．$\frac{4}{3}$　　D．$-\frac{4}{3}$

4．若$\overrightarrow{AB}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{BA}$，则实数$\lambda=$_____.

5．已知向量$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(-2,4)$，则$|2\vec{a}-3\vec{b}|=$_____.

6．已知$A(4,-2)$，$B(m,n)$，AB的中点M的坐标为$(-2,6)$，求m，n.

二、能力拓展

7．已知$|\vec{a}|=\sqrt{10}$，$\vec{b}=(1,2)$且$\vec{a}\parallel\vec{b}$，求向量$\vec{a}$的坐标.

8．已知$A(1,0)$，$B(4,3)$，$C(2,4)$，$D(0,2)$，用向量法证明：四边形$ABCD$为梯形.

【高考链接】

（2002 年单招试题）已知向量$\vec{a}=(-3,2)$，若$\vec{a}$的终点坐标为$B(2,-1)$，则向量$\vec{a}$的起点坐标是（　　）

A.（−5，−3）　　B.（−5，3）　　C.（5，−3）　　D.（5，3）

7.5　平面向量的内积（一）

【学习目标】

1. 知识目标：掌握平面向量的数量积的定义、性质及运算律；掌握向量垂直的条件；了解用平面向量的数量积在处理长度、角度和垂直问题的优越性.
2. 能力目标：通过教学培养学生的探索能力；渗透一切事物相互联系和相互制约的辩证唯物主义观点.

【知识精要】

1. 两个非零向量夹角

非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则$\angle AOB=\theta$，$\theta$叫做$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，记作$<\vec{a},\vec{b}>$.

注意（1）当$\theta=0$时，$\vec{a}$与$\vec{b}$同向；

（2）当$\theta=\pi$时，$\vec{a}$与$\vec{b}$反向；

（3）当$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，记作$\vec{a}\perp\vec{b}$；

（4）范围：$0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

2. 平面向量内积（数量积）

已知两个非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$，它们的夹角是θ，称数量$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$为$\vec{a}$与$\vec{b}$的内积，记作$\vec{a}\cdot\vec{b}$，即$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$）.

注意（1）两个向量的数量积是一个实数，不是向量，符号由$\cos\theta$的符号所决定；

（2）在实数中，若$a\neq0$，且$a\cdot b=0$，则$b=0$；但是在数量积中，若$\vec{a}\neq\vec{0}$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，不能推出$\vec{b}=\vec{0}$，因为其中$\cos\theta$有可能为 0.

（3）已知实数 a、b、c（$b\neq0$），则$ab=bc\Rightarrow a=c$，但是$\vec{a}\cdot\vec{b}\neq\vec{b}\cdot\vec{c}\Rightarrow\vec{a}=\vec{c}$；

（4）在实数中，虽然有$(a\cdot b)c=a(b\cdot c)$，但是$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}\neq\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$.

3. 两个向量的数量积的性质

（1）$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$；

（2）当$\vec{a}$与$\vec{b}$同向时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$；当$\vec{a}$与$\vec{b}$反向时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$.

特别的$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$或$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$；

（3）$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$；

（4）$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqslant|\vec{a}||\vec{b}|$.

4．平面向量数量积的运算律

（1）交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；

（2）数乘结合律：$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$；

（3）分配律：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

注意 由上述运算律得到下列常用结论：

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$$

$$(\vec{a}\pm\vec{b})^2=\vec{a}^2\pm2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$$

【基础过关】

1．若$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$，$<\vec{a}$，$\vec{b}>=30^\circ$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$等于（　　）

A．6　　B．-6　　C．$6\sqrt{3}$　　D．$-6\sqrt{3}$

2．设$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=6$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-9\sqrt{3}$，则向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　　）

A．30°　　B．60°　　C．120°　　D．150°

【典型例题】

例 7-5-1　已知$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=6$，当$\vec{a}\parallel\vec{b}$，求$\vec{a}\cdot\vec{b}$.

【要点解析】两个向量的数量积与它们的夹角有关，其范围是$[0,\ \pi]$，因此，当$\vec{a}\parallel\vec{b}$时，有0或π两种可能.

【解】若$\vec{a}$与$\vec{b}$同向，则它们的夹角$\theta=0$

$\therefore\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos0=3\times6\times1=18$

若$\vec{a}$与$\vec{b}$反向，则它们的夹角$\theta=\pi$

$\therefore\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\pi=3\times6\times(-1)=-18$.

例 7-5-2　已知$|\vec{a}|=6$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=12$，求：（1）$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角；（2）$|\vec{a}+\vec{b}|$；（3）$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})$.

【要点解析】这一类型题目，要求学生切实把握好数量积的定义、性质、运算律.

【解】（1）$\cos<\vec{a}$，$\vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{12}{6\times4}=\dfrac{1}{2}$

$\because0\leqslant<\vec{a}$，$\vec{b}>\leqslant\pi$

$\therefore<\vec{a}$，$\vec{b}>=60^\circ$.

（2）$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{36+24+16}=2\sqrt{19}$.

（3）$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{b}^2=36-12-6\times4^2=-72$.

例 7-5-3　已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 都是非零向量，且 $\vec{a}+3\vec{b}$ 与 $7\vec{a}-5\vec{b}$ 垂直，$\vec{a}-4\vec{b}$ 与 $7\vec{a}-2\vec{b}$ 垂直，求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角.

【要点解析】由两个向量垂直的条件，得到两个方程，求出两个向量的数量关系，再由内积的定义求出两个向量的夹角.

【解】由（$\vec{a}+3\vec{b}$）（$7\vec{a}-5\vec{b}$）$=0\Rightarrow 7\vec{a}^{\,2}+16\vec{a}\cdot\vec{b}-15\vec{b}^{\,2}=0$　　①

（$\vec{a}-4\vec{b}$）（$7\vec{a}-2\vec{b}$）$=0\Rightarrow 7\vec{a}^{\,2}-30\vec{a}\cdot\vec{b}+8\vec{b}^{2}=0$　　②

两式相减：$2\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}^{2}$

代入①或②得 $\vec{a}^{\,2}=\vec{b}^{2}$

设 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\vec{b}^{2}}{2|\vec{b}|^{2}}=\dfrac{1}{2}$　　$\therefore\theta=60^{\circ}$.

【巩固提高】

一、强化训练

1．已知点 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，动点 $P(x,y)$ 满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，则点 P 的轨迹是（　　）

A．圆　　B．椭圆　　C．双曲线　　D．抛物线

2. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120°，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$，则 $|\vec{b}|$ 等于（　　）

A．5　　B．4　　C．3　　D．1

3．在面积为 2 的等腰直角三角形 ABC（A 为直角顶点）中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$_____.

4．在 $\triangle ABC$ 中，已知 $|\overrightarrow{AB}|=4$，$|\overrightarrow{AC}|=1$，若 $\angle BAC=60^{\circ}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$_____.

5．已知 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，则（$2\vec{a}-3\vec{b}$）·（$2\vec{a}+\vec{b}$）=_____.

6．已知 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，且（$\vec{a}-\vec{b}$）与 $\vec{a}$ 垂直，求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角.

二、能力拓展

7．设 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，且 $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\lambda\vec{b}$ 垂直，求 λ.

8．已知$|\vec{a}|=6$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为60°，求$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})$.

【高考链接】

（2009年单招试题）已知向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为60°，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，则$|\vec{a}+\vec{b}|=$（　　）

A．2　　B．3　　C．$\sqrt{7}$　　D．7

7.6　平面向量的内积（二）

【学习目标】

1．知识目标：掌握平面向量数量积的坐标表示，会进行平面向量数量积的运算；掌握平面向量的模的坐标公式以及平面内两点间的距离公式；能用平面向量数量积的坐标公式判断两个平面向量的垂直关系.

2．能力目标：通过平面向量数量积的数与形的相互转化，进一步体会数形结合的思想.

【知识精要】

1．平面两向量数量积的坐标表示

已知两个非零向量$\vec{a}=(x_1,\ y_1)$，$\vec{b}=(x_2,\ y_2)$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

这就是说：两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积之和.

2．平面内两点间的距离公式

（1）设$\vec{a}=(x,\ y)$，则$|\vec{a}|^2=x^2+y^2$或$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

（2）如果表示向量$\vec{a}$的有向线段的起点和终点的坐标分别为$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

那么$|\vec{a}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，这就是平面内两点间的距离公式.

3．向量垂直的判定

设$\vec{a}=(x_1,\ y_1)$，$\vec{b}=(x_2,\ y_2)$，则$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

4．两向量夹角的余弦（$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$）

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

【基础过关】

1．已知 $\vec{a}=(2,-3)$，$\vec{b}=(-2,3)$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ （　　）

A. 垂直　　B. 平行且方向相同

C. 平行且方向相反　　D. 既不垂直也不平行

2．设向量 $\vec{a}=(4,-5)$，$\vec{b}=(m+1,1-m)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $m=$_____.

3．设向量 $\vec{a}=(-1,2)$，$\vec{b}=(2,-1)$，则 $(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})=$_____.

【典型例题】

例 7-6-1　已知 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(-2,3)$，求 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$，$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})$.

【要点解析】数量积的运算可以直接用坐标公式运算，也可以先化简再计算.

【解】 解法一

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=(-1,5)\cdot(3,-1)=-1\times3+5\times(-1)=-8$$

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=(3,-1)\cdot(0,7)=3\times0+(-1)\times7=-7$$

解法二

$$|\vec{a}|=\sqrt{5},\ |\vec{b}|=\sqrt{13},\ \vec{a}\cdot\vec{b}=4$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{13})^2=-8$$

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=2\times5-4-13=-7$$

例 7-6-2　已知 $\vec{a}=(2,2)$，$<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\pi}{4}$，$|\vec{b}|=2$，求 $\vec{b}$ 的坐标.

【要点解析】先设 $\vec{b}$ 的坐标，再根据题目的条件，列出两个方程，从而求出 $\vec{b}$ 的坐标，体现了方程的思想.

【解】设 $\vec{b}=(x,y)$，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{4}=2x+2y$$

$$2\sqrt{2}\times2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2x+2y$$

$$x+y=2$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{x^2+y^2}=2$$

解方程组 $\begin{cases}x+y=2\\ \sqrt{x^2+y^2}=2\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases}$

$\therefore \vec{b}=(2,0)$ 或 $\vec{b}=(0,2)$.

例 7-6-3 已知 $A(1,2)$，$B(2,3)$，$C(-2,5)$，求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

【要点解析】本题的关键是构造数量积，因为数量积的定义式中含有边、角两种关系.

【证明】$\because \overrightarrow{AB}=(2-1,3-2)=(1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-2-1,5-2)=(-3,3)$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-3)+1\times3=0$　$\therefore \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

例 7-6-4 在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=(2,3)$，$\overrightarrow{AC}=(1,k)$，且 $\triangle ABC$ 的一个内角为直角，求 k 值.

【要点解析】由于 $\triangle ABC$ 的一个内角为直角，但没有说明哪一个角是直角，所以解题时要分类讨论.

【解】当 $\angle A=90°$ 时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$　$\therefore 2\times1+3\times k=0$　$\therefore k=-\dfrac{3}{2}$；

当 $\angle B=90°$ 时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$　$\because \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=$（1–2，$k$–3）=（–1，$k$–3）

$\therefore 2\times(-1)+3\times(k-3)=0$　$\therefore k=\dfrac{11}{3}$；

当 $\angle C=90°$ 时，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$　$\therefore -1+k(k-3)=0$　$\therefore k=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

【巩固提高】

一、强化训练

1．若 $\vec{a}=(-2,1)$，$\vec{b}=(1,1)$，且 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp\vec{a}$，则实数 λ 的值是　（　）

A．–3　　B．0　　C．3　　D．5

2．设 $\vec{a}=(\cos\alpha,-\sqrt{3})$，$\vec{b}=(1,\sin\alpha)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则 α 的值是　（　）

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{\pi}{12}$或$\dfrac{5\pi}{12}$　　D．$\dfrac{\pi}{6}$或$\dfrac{5\pi}{6}$

3．向量 $\vec{a}=(1,1)$，$\vec{b}=(2,5)$，$\vec{c}=(3,x)$，$(8\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=30$，则 $x=$_____.

4．若平面向量 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角是 180°，$\vec{a}=$（1，–2）且 $|\vec{b}|=3\sqrt{5}$，则 $\vec{b}=$_____.

5．已知向量 $\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(1,3)$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为_____.

6．已知 $A(1,0)$，$B(3,1)$，$C(2,0)$，且 $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$，$\vec{b}=\overrightarrow{CA}$，求向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角.

二、能力拓展

7．已知向量 $\vec{a}=(3,-2)$，$\vec{b}=(-5,-1)$，求（1）$(3\vec{a})\cdot\vec{b}$；（2）$|\vec{a}-2\vec{b}|$.

8．已知两个向量$\vec{a}=(3,4)$，$\vec{b}=(2,-1)$，若（$\vec{a}+x\vec{b}$）⊥（$\vec{a}-\vec{b}$），求x．

【高考链接】

（2005 年单招试题）平面向量$\vec{a}=(-1,\sqrt{3})$，$\vec{b}=(\frac{\sqrt{3}}{2},x)$，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$x$的值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．2　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．−2

本章小结与复习

【知识结构】

- 平面向量
 - 平面向量的概念
 - 平面向量的概念
 - 平行向量
 - 平面向量的加法、减法和数乘运算
 - 平面向量的加法、减法运算
 - 平面向量的数乘运算
 - 平面向量的坐标表示
 - 平面向量的坐标表示
 - 平面向量的坐标运算
 - 平面向量的内积
 - 平面向量内积的概念
 - 平面向量内积的运算

【考纲解读】

从近几年的单招试题来看，试题主要集中在向量平行、垂直的充要条件及向量内积的概念及其坐标运算．从题型来看，以选择题为主，教学中要关注新旧知识间的联系，引导学生通过类比、归纳、综合等方法的运用，培养学生分析、综合运用能力和计算技能．通常将向量与三

角、解析几何等结合起来进行考查，因此我们在教学中要注重平面向量内积的教学.

考　点	要　求
平面向量的概念	了　解
平面向量的加法、减法和数乘运算	理　解
平面向量的坐标表示	了　解
平面向量的内积	了　解

【考题剖析】

例 7-1　（2010 年单招试题）设向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，$\vec{a}=(2,1)$，$\vec{a}+2\vec{b}=(4,5)$，则$\sin\theta=$_____.

【剖析】先求$\vec{b}=\frac{1}{2}[(4,5)-\vec{a}]$，再求$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{4}{5}$$

又$\theta\in[0,\pi]$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{3}{5}.$$

本题主要考查向量坐标的加法和向量的夹角、内积的定义及运算以及同角三角函数关系式.

例 7-2　（2011 年单招试题）已知向量$\vec{a}=(|x+1|,1)$，$\vec{b}=(1,-2)$，若$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$，则x的取值范围是（　　）

A.（$-\infty$，$+\infty$）　　B.（$-\infty$，-2）$\cup$（2，$+\infty$）

C.（-3，1）　　D.（$-\infty$，-3）$\cup$（1，$+\infty$）

【剖析】$\because\vec{a}\cdot\vec{b}=|x+1|-2>0$

$|x+1|>2$

$x+1>2$或$x+1<-2$

$x>1$或$x<-3$，

$\therefore x$的取值范围是（$-\infty$，-3）$\cup$（1，$+\infty$），选 D.

本题主要考查内积的概念及坐标运算及含绝对值不等式的解法. 向量与不等式结合起来考查.

例 7-3　（2012 年单招试题）已知向量$\vec{a}=(1,\ x)$，$\vec{b}=(-1,\ x)$. 若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$|\vec{a}|$等于（　　）

A.　1　　B.　$\sqrt{2}$　　C.　2　　D.　4

【剖析】$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1+x^2=0$

$x=\pm1$

$|\vec{a}|=\sqrt{2}$

选 B.

本题主要考查向量垂直的充要条件及向量的模的计算.

例 7-4　（2007 年单招试题）若向量 $\vec{a}=(4,-3)$，则下列向量中与 $\vec{a}$ 垂直的单位向量是（　　）

A．$(3,-4)$　　B．$(3,4)$　　C．$(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$　　D．$(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$

【剖析】本题可用代入检验法，只有 C、D 是单位向量，再由向量垂直的充要条件，选 C.

【直接解法】与 $\vec{a}$ 垂直的单位向量 $\vec{e}=(x,y)$，则

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{e}=0\\|\vec{e}|=1\end{cases}\text{，即}\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{e}=4x-3y=0\\|\vec{e}|=\sqrt{x^2+y^2}=1\end{cases},$$

$$\text{解得}\begin{cases}x=\frac{3}{5}\\y=\frac{4}{5}\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-\frac{3}{5}\\y=-\frac{4}{5}\end{cases},$$

所以 $\vec{e}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ 或 $\vec{e}=(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$.

从而选 C.

本题主要考查向量垂直的充要条件及单位向量的概念.

【巩固训练】

一、强化训练

1．（2006 年单招试题）已知向量 $\vec{a}=(1,1)$，$\vec{b}=(2,-3)$，若 $k\vec{a}-2\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直，则实数 k 等于（　　）

A．-1　　B．-10　　C．2　　D．0

2．若向量 $\vec{a}=\left(x,\frac{4}{3}x+2\right)$，$\vec{b}=(2x,-3)$ 的夹角为钝角，则实数 x 的取值范围为_____.

3．在 $\square ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}=(1,2)$，$\overrightarrow{BD}=(-3,2)$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$_____.

4．已知 $\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(-2,3)$，且 $k\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}+2\vec{b}$ 垂直，则 $k=$_____.

二、能力拓展

5．已知 $\vec{a}=(3,-1)$，$\vec{b}=(1,2)$，求满足条件 $\vec{x}\cdot\vec{a}=9$ 与 $\vec{x}\cdot\vec{b}=-4$ 的向量 $\vec{x}$.

6．已知 $A(2,3)$，$B(-1,6)$，$C(1,4)$，且 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$.（1）求点 D 的坐标；（2）求线段 CD 的长.

第 8 章　直线与圆的方程

8.1　两点间的距离公式及中点公式

【学习目标】

1．知识目标：（1）了解用向量的模和向量相等的概念推导两点间距离公式和中点公式的过程；

（2）能较熟练地应用公式计算两点间距离和线段的中点坐标.

2．能力目标：（1）培养学生的观察能力、逻辑推理能力和合作学习的能力，使学生明白从特殊推出一般的思想；

（2）能借助“数形结合”的方法，培养学生解决问题的能力，并提高计算能力，培养学生严密而准确的数学表达能力.

【知识精要】

1. 一般地，如果 x 轴上的两点 P_1 与 P_2 的坐标分别为 x_1 与 x_2，那么 P_1 与 P_2 两点间的距离为

$$|P_1P_2| = |x_1 - x_2|$$

2. 平面内两点间的距离

已知平面内任意两点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$，则平面内两点间的距离公式为

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

特别地，原点 $O(0,\ 0)$ 与任一点 $P(x,\ y)$ 的距离 $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. 中点坐标公式

已知 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$，点 $P(x,\ y)$ 是线段 P_1P_2 的中点，则 $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$，$y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

即线段中点的横坐标是两个端点的横坐标和的一半，中点的纵坐标是两个端点的纵坐标和的一半.

【基础过关】

1. 平面内两点 $A(-2,\ 0)$，$B(3,\ 0)$ 间的距离为_____.

2. 平面内原点 $O(0,\ 0)$ 与点 $P(3,\ 4)$ 的距离为_____.

3. 已知平面内两点 $A(-6,\ 0)$，$B(2,\ 0)$，则线段 AB 的中点坐标是_____.

【典型例题】

例 8-1-1　已知平面内两点 $A(-2,\ 1)$，$B(3,\ 5)$，求 $|AB|$.

【解】由平面内两点间的距离公式得

$$|AB|=\sqrt{(-2-3)^2+(1-5)^2}=\sqrt{41}$$

例 8-1-2　求过下列两点线段的中点坐标.

（1）$A(2,\ -4)$，$B(-6,\ 5)$；　　（2）$C(m,\ 0)$，$D(0,\ n)$.

【解】（1）设 AB 的中点为 $P(x,\ y)$，由中点坐标公式得：$x=\dfrac{2-6}{2}=-2$，　$y=\dfrac{-4+5}{2}=\dfrac{1}{2}$

所以线段 AB 的中点坐标为 $\left(-2,\ \dfrac{1}{2}\right)$.

（2）设 CD 的中点为 $Q(x,\ y)$，由中点坐标公式得：$x=\dfrac{m+0}{2}=\dfrac{m}{2}$，　$y=\dfrac{0+n}{2}=\dfrac{n}{2}$

所以线段 CD 的中点坐标为 $\left(\dfrac{m}{2},\ \dfrac{n}{2}\right)$.

例 8-1-3　已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(2,\ 1)$，$B(5,\ 3)$，$C(4,\ 7)$，求 $\triangle ABC$ 中 AC 边上的中线长.

【要点解析】中线长是三角形的顶点和对边中点的连线段的长，先用中点坐标公式：$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$，求出中点坐标，再用平面内两点间的距离公式：$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，求出中线长.

【解】设 AC 边上的中点 D 的坐标为 $(x,\ y)$，由中点坐标公式得

$$x=\frac{2+4}{2}=3,\quad y=\frac{1+7}{2}=4$$

即 D 点的坐标为 $(3,\ 4)$

再由两点间距离公式，得

$$|BD|=\sqrt{(5-3)^2+(3-4)^2}=\sqrt{5}$$

【巩固提高】

一、强化训练

1．填空

（1）在平面直角坐标系中，已知三点 $A(3,\ 5)$、$B(11,\ -1)$ 和 $D(3,\ -1)$，则 $|AD|=$_____；$|BD|=$_____；$|AB|=$_____.

（2）已知原点 $O(0,\ 0)$ 和点 $P(-6,\ 8)$，则线段 OP 的中点坐标是_____.

（3）已知两点 $A(-1,\ 3)$ 和 $B(2,\ 3)$，则线段 AB 的中点坐标是_____.

（4）已知两点 $M(-1,3)$ 和 $N(2,-1)$，则线段 MN 的中点坐标是_____.

2. 已知平面内两点 $A(4,7)$，$B(m,-1)$，若 $|AB|=10$，求 m 的值.

3. 已知点 $P(5,-3)$ 为 AB 的中点，且点 A 坐标为 $(6,-4)$，试求：（1）B 点坐标；（2）线段 AB 的长度.

4. 已知△ABC 的三个顶点是 $A(-5,1)$，$B(-1,1)$，$C(-1,4)$.

求：（1）△ABC 三条边的长；（2）试判断三角形的形状.

5. 已知两点 $A(-1,2)$，$B(2,\sqrt{7})$，在 x 轴上求一点 P，使 $|PA|=|PB|$，并求 $|PA|$ 的值.

6. 求点 $A(-1,3)$ 关于点 $P(5,-3)$ 的对称点 A_1 的坐标.

二、能力拓展

7. 已知点 $A(0,5)$，点 C 落在 x 轴上，点 B 落在 y 轴上，且△ABC 为等边三角形，求线段 BC 的中点坐标.

8. 已知□$ABCD$ 中的三个顶点 $A(-2,1)$，$B(-1,5)$，$C(4,5)$，求顶点 D 的坐标.

【高考链接】

（1998 年单招试题）点 $M(2,\ 3)$ 是线段 $A(3,\ m)$，$B(n,\ -1)$ 的中点，则 $m=$_____，$n=$_____.

8.2　直线的倾斜角和斜率

【学习目标】

1．知识目标：（1）理解直线的倾斜角的概念和范围；
（2）掌握直线的斜率的概念及直线的倾斜角与斜率的关系，掌握过两点的直线的斜率计算公式，并会应用公式解题.

2．能力目标：（1）培养学生思维的严谨性，注重学生语言表达能力的培养；
（2）充分利用斜率和倾斜角是从数与形两方面刻画直线相对于 x 轴倾斜程度的两个量这一事实，培养学生数形结合的数学思想.

【知识精要】

1. 直线的倾斜角

在平面直角坐标系中，把一条直线 l 的向上方向与 x 轴的正方向所成的最小正角记为 α，那么 α 就叫做直线 l 的倾斜角.

2. 直线的倾斜角范围

倾斜角 α 的取值范围是 $0^\circ \leqslant \alpha < 180^\circ$，$\alpha \in [0,\ \pi)$.

当直线和 x 轴平行或重合时，直线的倾斜角为 0°.

3. 直线的斜率

倾斜角不是 90° 的直线，它的倾斜角 α 的正切叫做这条直线的斜率，常用 k 表示. 即 $k=\tan\alpha(\alpha \neq 90^\circ)$.

倾斜角是 90° 的直线没有斜率.

4. 倾斜角 α 与斜率 k 之间的关系

（1）当 $\alpha = 0^\circ$ 时，即直线与 y 轴垂直时，$k=0$.

（2）当 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时，即直线的倾斜角为锐角时，$k>0$.

（3）当 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ 时，即直线的倾斜角为钝角时，$k<0$.

（4）当 $\alpha = 90^\circ$ 时，即直线与 x 轴垂直时，斜率 k 不存在；反之，斜率 k 不存在，则 $\alpha = 90^\circ$.

5. 斜率公式

记经过两点 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，且 $x_1 \neq x_2$ 的直线 l 的斜率为 k，则

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad (x_1 \neq x_2)$$

当$x_1=x_2$时，即直线l垂直于x轴（平行于y轴）时，斜率k不存在.

【基础过关】

1. 请作出函数$y=2x+1$的图像.

2. 请求出0°，30°，45°，60°，120°，135°，150°的正切值.

3.（1）已知直线的倾斜角为60°，则其斜率为_____；

（2）已知直线的斜率为1，则其倾斜角为_____.

【典型例题】

例 8-2-1 已知直线l_1的倾斜角$\alpha_1=30^\circ$，直线$l_1\perp l_2$，求l_1、l_2的斜率.

【要点解析】首先要根据两直线的位置关系求出直线l_2的倾斜角，然后由三角函数的诱导公式及特殊角正切值求直线的斜率.

【解】l_1的斜率$k_1=\tan\alpha_1=\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\because l_2$的倾斜角$\alpha_2=90^\circ+30^\circ=120^\circ$

$\therefore l_2$的斜率$k_2=\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$.

例 8-2-2 求过下列两点的直线的斜率k及倾斜角α.

（1）$P_1(-2,3)$、$P_2(-2,7)$；　　（2）$P_1(3,-2)$、$P_2(-2,-2)$；

（3）$P_1(-1,2)$、$P_2(3,-2)$；　　（4）$P_1(3,3)$、$P_2(-2,7)$.

【要点解析】根据公式解得倾斜角的正切值即直线的斜率k，然后由特殊角的三角函数值或用计算器求出对应的倾斜角α.

【解】（1）斜率不存在，$\alpha=90^\circ$

（2）$k=\tan\alpha=\dfrac{-2-(-2)}{-2-3}=0$，$\alpha=0^\circ$

（3）$k=\tan\alpha=\dfrac{-2-2}{3-(-1)}=-1$，$\alpha=135^\circ$

（4）$k=\tan\alpha=\dfrac{7-3}{-2-3}=-\dfrac{4}{5}$，$\alpha=141.3^\circ$

例 8-2-3 已知三角形的顶点$A(0,5)$，$B(1,-2)$，$C(-6,m)$，BC中点为D，当AD的斜率为1时，求m的值及$|AD|$的长.

【要点解析】结合前面一节所讲的知识点，要求学生通过中点坐标公式、两点间距离公式，以及根据斜率公式求出待定量.



【解】D 点坐标为 $D\left(-\frac{5}{2},\ \frac{m-2}{2}\right)$，$k_{AD}=\dfrac{\frac{m-2}{2}-5}{-\frac{5}{2}}=1\Rightarrow m=7$

$|AD|=\sqrt{(\frac{5}{2})^2+(5-\frac{5}{2})^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

【巩固提高】

一、强化训练

1.（1）已知直线 $y=-\sqrt{3}x$，则斜率为_____，倾斜角为_____.

（2）已知直线 $y=x\tan 60^\circ$，则斜率为_____，倾斜角为_____.

（3）已知直线 $y=x\tan\left(-30^\circ\right)$，则斜率为_____，倾斜角为_____.

2. 直线有倾斜角是直线斜率存在的_____条件，直线斜率存在的充要条件是_____.

3. 已知直线 l 经过 $A(-2,1)$、$B(-5,4)$ 两点，则直线 l 的斜率为____，倾斜角为_____.

4. 已知两点 A（x，-3），B（3，-1），且直线 AB 的斜率为 $\frac{1}{2}$，则 $x=$_____.

5. 已知直线 l 经过点 $A(3,\ 7)$，$B(x,\ 5)$，$C(-1,\ y)$，若直线 l 的斜率 $k=2$，求 x，y 的值.

6. 已知点 $A(2,\ -1)$，$B(-3,\ 1)$，$C(2,\ 4)$，求直线 AB，BC，AC 的斜率，并判断它们的倾斜角是钝角、直角还是锐角.

二、能力拓展

7．若三点 $M(4,\ 3)$，$N(2,\ -3)$，$P(5,\ \frac{m}{2})$ 共线，求 m 的值.

8．若直线 l 的斜率 $k=1-m^2\ (m\in\mathbf{R})$，求直线 l 的倾斜角 α 的取值范围.

【高考链接】

（2007 年单招试题）直线 $x\tan\frac{7\pi}{5}-y=0$ 的倾斜角是 （　　）

A. $-\frac{2\pi}{5}$　　B. $\frac{2\pi}{5}$　　C. $\frac{7\pi}{5}$　　D. $\frac{3\pi}{5}$

8.3　直线的方程（一）

【学习目标】

1．知识目标：（1）根据条件会推导直线的点斜式方程.

（2）掌握直线方程的点斜式的特征及适用范围，了解直线方程的斜截式是点斜式的特例，掌握直线方程的两点式、截距式，并能根据条件熟练地求出满足已知条件的直线方程.

2．能力目标：（1）通过让学生经历直线方程的发现过程，以提高学生分析、比较、概括、化归的数学能力，使学生初步了解用代数方程研究几何问题的思路，培养学生综合运用知识解决问题的能力.

（2）在教学中充分揭示“数”与“形”的内在联系，体会数、形的统一美，激发学生学习数学的兴趣，对学生进行对立统一的辩证唯物主义观点的教育，培养学生勇于探索、勇于创新的精神.

【知识精要】

1. 直线的点斜式方程

直线 l 经过点 $P_1(x_1,\ y_1)$，且斜率为 k，则直线的点斜式方程为 $y-y_1=k(x-x_1)$.

注意 直线的斜率 $k=0$ 时，直线方程为 $y=y_1$；当直线的斜率 k 不存在时，不能用点斜式求它的方程，这时的直线方程为 $x=x_1$.

2. 直线的两点式方程

直线 l 经过两点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$，则直线的两点式方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\quad (x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2)$$

3. 截距

直线 l 与 x 轴的交点 $(a,\ 0)$，与 y 轴的交点 $(0,\ b)$，则称 a 为直线 l 在 x 轴上的截距（即为横截距），b 为直线 l 在 y 轴上的截距（即为纵截距）.

4. 直线的斜截式方程

直线 l 的斜率为 k，与 y 轴的交点 $P(0,\ b)$（纵截距为 b），则直线的斜截式方程为 $y=kx+b$.



5. 直线的截距式

直线在 x 轴和 y 轴上的截距分别为 a，b，则直线的截距式为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a\neq 0,\ b\neq 0)$.

【基础过关】

1. 确定一条直线需要具备几个独立条件.

2.（1）已知直线过点 $(0,\ 2)$，且斜率为 -5，则直线方程为_____.

（2）已知直线 $y=2x+5$，斜率为____，纵截距为_____.

（3）已知直线 l 的斜率为 $\frac{1}{2}$，且在 y 轴截距为 -3，则直线 l 的方程为_____.

（4）已知直线过点 $A(1,\ 1)$，$B(-2,\ -1)$，则斜率是_____.

【典型例题】

例 8-3-1　求过 $P(2,\ -1)$，且满足下列条件的直线方程：

（1）斜率为 -3；（2）倾斜角为 30°；（3）过 $Q(-4,\ 2)$；（4）平行于 y 轴；（5）平行于 x 轴.

【要点解析】根据已知条件选用适当的方程形式，要特别注意方程的适用条件，也可通过作图来辅助解题.

【解】（1）由题意得：$P(2,\ -1)$，斜率 $k=-3$

由直线的点斜式方程 $y-y_1=k(x-x_1)$，得 $y-(-1)=-3(x-2)$

所求直线的方程为 $3x+y-5=0$.

（2）由题意得：斜率 $k=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

由直线的点斜式方程 $y-y_1=k(x-x_1)$，得 $y-(-1)=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$

所求直线的方程为 $\sqrt{3}x-3y-2\sqrt{3}-3=0$.

（3）由题意得：$P(2,\ -1)$，$Q(-4,\ 2)$

由直线的两点式方程得：$\frac{x-2}{-4-2}=\frac{y-(-1)}{2-(-1)}$

所求直线的方程为 $x+2y=0$.

（4）由题意得：直线上每一点的横坐标都等于 2，所求直线的方程为 $x=2$.

（5）由题意得：直线上每一点的纵坐标都等于 -1，所求直线的方程为 $y=-1$.

例 8-3-2　求下列直线的方程：

（1）倾斜角为 45°，在 y 轴上的截距为 -2；

（2）在 x 轴上的截距为 -5，在 y 轴上的截距为 6；

（3）过点 $P(-3,\ 1)$，在 y 轴上的截距为 5.

【解】（1）由题意得：$k=\tan 45^\circ=1$，$b=-2$

由斜截式方程得：$y=x-2$

所求直线的方程为 $x-y-2=0$.

（2）由题意得：$a=-5$，$b=6$

由截距式方程得：$\dfrac{x}{-5}+\dfrac{y}{6}=1$

所求直线的方程为 $6x-5y+30=0$.

（3）由题意得：直线过两点 $(-3,\ 1)$，$(0,\ 5)$

$\therefore k=\dfrac{5-1}{0-(-3)}=\dfrac{4}{3}$

由斜截式方程得：$y=\dfrac{4}{3}x+5$

所求直线的方程为 $4x-3y+15=0$.

例 8-3-3 已知直线过点 $P(0,\ 4)$，且其倾斜角 α 满足 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$，求直线方程.

【要点解析】首先要根据同角三角函数之间的关系求出斜率 $k=\tan\alpha$.

【解】$\because$ 直线的倾斜角 α 满足 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}<0$

$\therefore 90^\circ<\alpha<180^\circ$　$\therefore \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{4}{5}$

$\therefore$ 直线的斜率 $k=\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{4}{3}$

由斜截式方程得 $y=-\dfrac{4}{3}x+4$

所求直线的方程为 $4x+3y-12=0$.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 过点 $P(-1,\ 0)$，斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线方程是（　　）

A. $y=\sqrt{3}x-1$　　B. $y=\sqrt{3}x+1$　　C. $y=\sqrt{3}(x-1)$　　D. $y=\sqrt{3}(x+1)$

2. 直线 $y=-2x+b$ 一定经过（　　）

A. 第一、三象限　　B. 第二、四象限　C. 第一、二、四象限　D. 第二、三、四象限

3. 过点 $P(3,\ -2)$，且倾斜角 α 满足 $\sin\alpha+\cos\alpha=0$ 的直线方程是_____.

4. 直线 l：$y-4=k(x+2)$ 必过定点_____；若 l 的倾斜角为 135°，则这条直线 l 在 y 轴上的截距是_____.

5. 直线 l 的倾斜角为 45°，且过点 $(1,\ 4)$，则这条直线被坐标轴所截得的线段长是_____.

6. 过点 $P(-2,\ 3)$ 的直线 l 与两坐标轴分别交于 A、B，线段 AB 中点恰是 P，求 l 的方程.

二、能力拓展

7. 求经过点 $P(-4, 2)$，且横、纵截距相等的直线的方程.

8. 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点是 $A(3, -2)$，$B(2, -6)$，$C(-1, 0)$，分别求 AB、BC、AC 边上中线所在的直线方程.

【高考链接】

（2003 年单招试题）过点 $P(1, -8)$，且在两坐标轴上的截距的绝对值相等的直线有（　　）

A. 4 条　　B. 3 条　　C. 2 条　　D. 1 条

8.4　直线的方程（二）

【学习目标】

1．知识目标：（1）掌握直线的一般式方程，会进行直线方程的一般式和特殊式的互化；
（2）能根据给定条件，选择适当的方程形式求直线方程.

2．能力目标：通过让学生经历直线方程的发现过程，以提高学生分析、比较、概括、化归的数学能力，培养学生综合运用知识解决问题的能力.

【知识精要】

直线方程的一般形式

在平面直角坐标系中，关于 x，y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$（其中 A、B、C 是常数，A、B 不全为 0）的形式，叫做直线方程的一般式.

（1）若 $B\neq 0$ 时，$Ax+By+C=0$ 方程可化为 $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$，它是直线方程的斜截式，表

示斜率为$-\frac{A}{B}$，纵截距为$-\frac{C}{B}$的直线.

（2）若$B=0$时，方程$Ax+By+C=0$变成$Ax+C=0$. 由于A、B不全为0，所以$A\neq 0$，则方程变为$x=-\frac{C}{A}$，表示垂直于x轴的直线，即斜率不存在的直线.

任何一条直线的方程都是关于x，y的二元一次方程，任何关于x，y的二元一次方程都表示一条直线.

【基础过关】

1. 一般式方程$Ax+By+C=0$中，当$A=0$时，其倾斜角为_____.

2. 把方程$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=-1$化成一般式是_____.

3. 将直线的方程$x-3y+6=0$化成斜截式，并求出直线的斜率和它在x轴、y轴上的截距.

【典型例题】

例 8-4-1 根据下列各条件写出直线的方程，并化成一般式:

（1）斜率是$-\frac{1}{3}$，经过点$A(6,-1)$；　　（2）经过点$B(5,2)$，平行于x轴;

（3）在x轴和y轴上的截距分别是$\frac{1}{2}$，-3；（4）经过两点$P_1(3,-2)$、$P_2(5,-4)$.

【要点解析】根据已知条件选用适当的方程形式，要特别注意方程的适用条件，也可通过作图来辅助解题. 同时要掌握直线方程的每一种形式的特点，并能灵活地转换.

【解】（1）由点斜式得$y-(-1)=-\frac{1}{3}(x-6)$

化成一般式得$x+3y-3=0$.

（2）由斜截式得$y=2$，化成一般式得$y-2=0$.

（3）由截距式得$\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{-3}=1$，化成一般式得$6x-y-3=0$.

（4）由两点式得$\frac{y+2}{-4-(-2)}=\frac{x-3}{5-3}$，化成一般式得$x+y-1=0$.

例 8-4-2 设直线l的方程为$2x+(k-3)y-2k+6=0(k\neq 3)$，根据下列条件分别确定$k$的值:（1）直线$l$的斜率是$-2$；（2）直线$l$在$x$轴、$y$轴上的截距之和等于0.

【要点解析】题中涉及到一般式与斜截式、截距式之间的转化，注意截距是否为零，这是应用截距式求直线方程最易出错和疏忽的地方.



【解】（1）直线 l 的斜率是 $-\dfrac{2}{k-3}=-2$，则 $k=4$.

（2）令 $x=0$，则 $y=\dfrac{2k-6}{k-3}$；令 $y=0$，则 $x=\dfrac{2k-6}{2}$

∵直线 l 在 x 轴、y 轴上的截距之和等于 0

∴ $\dfrac{2k-6}{k-3}+\dfrac{2k-6}{2}=0$，解得 $k=1$.

例 8-4-3　直线 l 经过点 $P\ (5,-3)$，且与两条坐标轴围成一个等腰直角三角形，求直线 l 的方程.

【要点解析】本题可用截距式，也可以用斜截式求解，但是要注意截距式是以直线在坐标轴上的截距不能为零为前提的，同时要能正确理解截距和距离的区别.

【解】设直线 l 的方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}=1$，或 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{-a}=1$（$a\neq 0$）

当直线 l 的方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}=1$ 时，点 $P\ (5,-3)$ 在直线 l 上

∴ $\dfrac{5}{a}+\dfrac{-3}{a}=1$，解得 $a=2$

∴直线 l 的方程为 $x+y-2=0$

当直线 l 的方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{-a}=1$ 时，点 $P\ (5,-3)$ 在直线 l 上

∴ $\dfrac{5}{a}+\dfrac{-3}{-a}=1$，解得 $a=8$

∴直线 l 的方程为 $x-y-8=0$

∴直线 l 的方程为 $x+y-2=0$ 或 $x-y-8=0$.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 直线 $x+6y+2=0$ 在 x 轴和 y 轴上的截距分别是（　　）

A. $2,\ \dfrac{1}{3}$　　B. $-2,\ -\dfrac{1}{3}$　　C. $-\dfrac{1}{2},\ -3$　　D. $-2,\ -3$

2. 直线 $x-y+4=0$ 的倾斜角是（　　）

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

3. 若 $ab<0,\ bc<0$，则直线 $ax+by=c$ 通过（　　）

A. 第一、二、三象限　　B. 第一、二、四象限

C. 第一、三、四象限　　D. 第二、三、四象限

4. 过 $A(3,\ -1)$，$B(5,\ 4)$ 的直线方程的两点式为_____，化成一般式为_____，化成截距式为_____，化成斜截式为_____.

5. 倾斜角与直线 $3x-2y=0$ 的倾斜角互补，且过点（-4，3）的直线方程是_____.

6. 如图 8-4-1 所示，已知三角形的顶点 A（−5，0）、B（3，−3）、C（0，2），求这个三角形三边所在直线的方程.

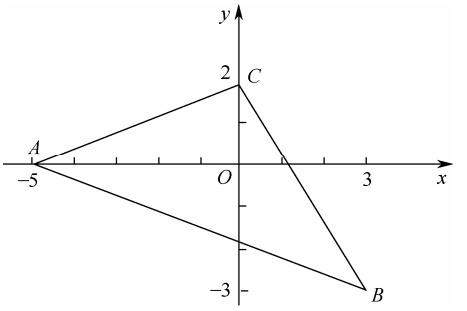


图 8-4-1

二、能力拓展

7. 直线 l 过点 $A(-5,-4)$ 且与两坐标轴所围成的三角形面积为 5，求直线 l 的方程.

8. 倾斜角分别为 α_1、α_2 的两条直线 l_1、l_2 有一个公共点 $(3,-1)$，已知 $\alpha_1+\alpha_2=\frac{\pi}{2}$，且 l_1 的方程为 $y=3x-b$，求 b 及 l_2 的方程.

【高考链接】

（2006 年单招试题）过点（2，–4），且在两坐标轴上的截距之和为 0 的直线有（　　）

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

8.5　两直线的位置关系（一）

【学习目标】

1．知识目标：（1）熟练掌握两条直线平行的充要条件;
（2）能够根据直线的方程判断两条直线的平行关系；
（3）会求相交直线的交点坐标.

2．能力目标：通过对两直线平行条件的讨论，培养学生运用已有知识解决新问题的能力及学生的数形结合能力.

【知识精要】

1．两条直线相交

设直线 l_1： $y=k_1x+b_1$，直线 l_2： $y=k_2x+b_2$，若 $k_1\neq k_2$，则 l_1 与 l_2 相交.

设直线 l_1： $A_1x+B_1y+C_1=0$，直线 l_2： $A_2x+B_2y+C_2=0$，若 $A_1B_2\neq A_2B_1$，则 l_1 与 l_2 相交.两直线相交，有且仅有一个交点，联立方程组求交点坐标.

2. 两条直线平行的条件

设直线 l_1： $y=k_1x+b_1$，直线 l_2： $y=k_2x+b_2$.

一般的结论是：当斜率都存在时，（1）$l_1//l_2\Leftrightarrow k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$；

（2）l_1 与 l_2 重合 $\Leftrightarrow$ $k_1=k_2$ 且 $b_1=b_2$.

当斜率都不存在时，$l_1//l_2$ 或 l_1 与 l_2 重合.

3. 若直线 l_1： $A_1x+B_1y+C_1=0$，直线 l_2： $A_2x+B_2y+C_2=0$．则

$$l_1//l_2\Leftrightarrow\begin{cases}A_1B_2\neq A_2B_1\\A_1C_2\neq A_2C_1\end{cases};$$

$$l_1\text{与}l_2\text{重合}\Leftrightarrow\begin{cases}A_1B_2=A_2B_1\\A_1C_2=A_2C_1\end{cases}.$$

注意（1）$A_1=A_2=0$，$\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}\neq0$ 时，$l_1//l_2//x$ 轴；

（2）$B_1=B_2=0$，$\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}\neq0$ 时，$l_1//l_2//y$ 轴.

4. 与直线 l： $Ax+By+C=0$ 平行的直线可设为 $Ax+By+m=0(m\neq C)$.

【基础过关】

1. 试确定下列各组直线的位置关系，若相交求出交点坐标.

（1）l_1： $x+2=0$，l_2： $x=1$；（2）l_1： $y-2=0$，l_2： $y=-1$；

（3）l_1： $x+2=0$，l_2： $y=-1$；（4）l_1： $x+2y-1=0$，l_2： $2x+4y-1=0$.

2. 若直线 l_1： $y=x+2$ 与直线 l_2： $y=kx+4$ 平行，则 $k=$_____.

【典型例题】

例 8-5-1 已知直线 l_1：$x+my+3=0$ 和直线 l_2：$(m-2)x+3y+m=0$ 平行，求 m 的值.

【要点解析】若两条直线平行，对于一般式方程有：$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$.

【解】由题意得：$\dfrac{1}{m-2}=\dfrac{m}{3}\neq\dfrac{3}{m}$

解得 $m=-1$ 或 $m=3$（舍去）

$\therefore m=-1$.

例 8-5-2 求过点 $A(1,-4)$ 且与直线 $2x+3y+5=0$ 平行的直线方程.

【要点解析】这类题型通常有两种解法：① 解法一用点斜式求直线方程的方法是通法，必须掌握；

② 解法二是常常采用的解题技巧. 一般地，直线 $Ax+By+C=0$ 中系数 A、B 确定直线的斜率，因此，与直线 $Ax+By+C=0$ 平行的直线方程可设为 $Ax+By+m=0(m\neq C)$，其中 m 待定（直线系）.

【解】解法一 已知直线的斜率为 $-\dfrac{2}{3}$，因为所求直线与已知直线平行，因此它的斜率也是 $-\dfrac{2}{3}$.

根据点斜式，得到所求直线的方程是 $y+4=-\dfrac{2}{3}(x-1)$

即 $2x+3y+10=0$.

解法二 设与直线 $2x+3y+5=0$ 平行的直线 l 的方程为 $2x+3y+m=0$（$m\neq 5$）.

$\because$ l 经过点 $A(1,-4)$，$\therefore$ $2\times1+3\times(-4)+m=0$，解得 $m=10$

$\therefore$ 所求直线方程为 $2x+3y+10=0$.

例 8-5-3 在平行四边形 $ABCD$ 中，已知顶点 $A(2,-3)$，$B(-2,4)$，$C(-6,-1)$，求：（1）直线 AD 与直线 CD 的方程；（2）D 点的坐标.

【要点解析】求 D 点的坐标可求直线 AD 与直线 CD 的交点，也可利用 BD 与 AC 的中点重合.

【解】（1）$\because$ 直线 AD 与直线 BC 平行

$\therefore k_{AD}=k_{BC}=\dfrac{5}{4}$

$\therefore$ 直线 AD 的方程是 $y+3=\dfrac{5}{4}(x-2)$，即 $5x-4y-22=0$

同理 $\because k_{CD}=k_{AB}=-\dfrac{7}{4}$

$\therefore$ 直线 CD 的方程是 $y+1=-\dfrac{7}{4}(x+6)$，即 $7x+4y+46=0$.

（2）由 $\begin{cases}5x-4y-22=0\\7x+4y+46=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-2\\y=-8\end{cases}$ $\therefore$ D 点的坐标 $(-2,-8)$.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 下列说法正确的是　　（　　）

A. 若直线 l_1 与 l_2 的斜率相等，则 $l_1 // l_2$

B. 若直线 l_1 与 l_2 的斜率都存在，则 $l_1 // l_2$

C. 若直线 l_1 与 l_2 中，一条直线的斜率存在，另一条直线的斜率不存在，则 l_1 与 l_2 必相交

D. 若直线 $l_1 // l_2$，则 $k_1 = k_2$

2. 已知直线 $y = -\dfrac{1}{m}x - \dfrac{6}{m}$ 和直线 $y = \dfrac{2-m}{3}x - \dfrac{2m}{3}$ 平行，则 m 的值为　　（　　）

A. -1 或 3　　B. 1 或 -3　　C. -3　　D. -1

3. 若直线 $2x + 6y + m = 0$ 与 $3x - (n^2 - 10)y + n = 0$ 平行，则　　（　　）

A. $m \neq n = \pm 1$　　B. $2m \neq 3n \pm 3$　　C. $m \neq n = \pm\sqrt{19}$；　　D. $3m \neq 2n = \pm 2$

4. 过点 $A(3, -5)$ 与直线 l_1：$x + 2y - 3 = 0$ 平行的直线方程是_____.

5. 平行于直线 $5x - 12y + 20 = 0$ 且在 y 轴上的截距为 -2 的直线方程为_____.

6. 已知直线 l 过点 $P(2, -3)$，且平行于过 $A(1, 2)$，$B(-1, -5)$ 两点的直线，求直线 l 的方程.

二、能力拓展

7. 求过两直线 l_1：$x + y + 1 = 0$ 与 l_2：$5x - y - 1 = 0$ 的交点，且与直线 $3x + 2y + 1 = 0$ 平行的直线的方程.

8. 求与直线 $2x+3y+5=0$ 平行，且在两坐标轴上的截距之和为 $\frac{5}{6}$ 的直线方程.

【高考链接】

（2010 年单招试题）已知过点 $A(-2,\ 0)$ 和点 $B(0,\ 1)$ 的直线与直线 $2x+my-1=0$ 平行，则 m 的值为 （　　）

A. -1　　B. -4　　C. 1　　D. 4

8.6　两直线的位置关系（二）

【学习目标】

1．知识目标：（1）熟练掌握两条直线垂直的充要条件;
（2）能够根据直线的方程判断两条直线的垂直关系.

2．能力目标：通过对两直线垂直条件的讨论，培养学生运用已有知识解决新问题的能力及学生数形结合的能力.

【知识精要】

1. 两条直线互相垂直的条件：

设两条直线 l_1 和 l_2，它们的斜率分别为 k_1 与 k_2，则有 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$.

注意 （1）这个判断的条件是在 l_1 和 l_2 都有斜率的前提下得到的. 如果两条直线分别垂直于两坐标轴，此时，一条直线的斜率为 0，另一条直线的斜率不存在.

（2）一般的结论是：$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$ 或一条直线的斜率为 0，另一条直线的斜率不存在.

（3）若直线的斜率 k 不存在，则不能利用直线垂直的充要条件求解.

2. 设直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，直线 l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$，则 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$.

3. 与直线 l：$Ax+By+C=0$ 垂直的直线可设为 $Bx-Ay+n=0$.

【基础过关】

1. 直线 l_1：$x-2=0$ 与直线 l_2：$y=-3$ 的位置关系是_____.

2. 若直线 l_1 的斜率为 -1，直线 l_2 的斜率为 1，则 l_1 与 l_2 的位置关系是_____.

3. 直线 l_1：$y=-\frac{2}{3}x+2$ 与直线 l_2：$3x-2y+1=0$ 的位置关系是_____.

【典型例题】

例 8-6-1　已知直线 $x+ay-a=0$ 与 $ax-(2a-3)y-1=0$ 互相垂直，求 a 的值.

【要点解析】选用适当的方法来解题，此题若用斜率来解，则需讨论.

【解】∵ $A_1=1$，$A_2=a$，$B_1=a$，$B_2=-(2a-3)$ 且两直线互相垂直

∴ $1\times a+a\times[-(2a-3)]=0$，解得 $a=2$ 或 $a=0$.

例 8-6-2　求过点 $A(-3,\ 1)$，且与直线 $3x+y-5=0$ 垂直的直线 l 的方程.

【要点解析】一般地，由于垂直两直线的斜率互为负倒数，则可得与直线 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线方程为 $Bx-Ay+n=0$，这是常常用到的解题技巧（直线系方程）.

【解】设与直线 $3x+y-5=0$ 垂直的直线方程为 $x-3y+n=0$

∵直线 l 经过点 $A(-3,\ 1)$　∴ $-3-3\times1+n=0$，解得 $n=6$

故所求直线 l 的方程为 $x-3y+6=0$.

例 8-6-3　已知△ ABC 的顶点 $B(2,\ 1)$，$C(-6,\ 3)$，其垂心为 $H(-3,\ 2)$，求点 A 的坐标.

【要点解析】垂心是三角形三条高的交点，是本题解题的关键.

【解】∵ $AB\perp CH$　∴ $k_{AB}=-\frac{1}{k_{CH}}=3$

∴直线 AB 的方程为 $y-1=3(x-2)$，即 $y=3x-5$ ①

∵ $AC\perp BH$　∴ $k_{AC}=-\frac{1}{k_{BH}}=5$

∴直线 AC 的方程为 $y-3=5(x+6)$，即 $y=5x+33$ ②

由①与②联立方程组 $\begin{cases}y=3x-5\\y=5x+33\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-19\\y=-62\end{cases}$

∴点 A 的坐标为 $(-19,\ -62)$.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 直线 $(\sqrt{2}-\sqrt{3})x+y=2$ 与直线 $x+(\sqrt{3}-\sqrt{2})y=3$ 的位置关系是　（　　）

A. 相交但不垂直　　B. 垂直　　C. 平行　　D. 重合

2. 过点 $\left(-4,\ \frac{1}{3}\right)$ 且与 y 轴垂直的直线方程是_____.

3. 已知直线 $Ax+4y-2=0$ 和直线 $2x-5y+C=0$ 垂直且垂足的坐标为 $(1,\ m)$，则 $A=$___，$C=$____，$m=$____.

4. 已知 $A(2,\ 0)$，$B(0,\ -4)$，则线段 AB 的垂直平分线方程是_____.

5. 直线 l 在 y 轴上的截距为 4，且与直线 $x+3y-4=0$ 垂直，则直线 l 的方程是_____.

6. 原点在直线 l 上的射影是 $P(-4,\ 2)$，求直线 l 的方程.

二、能力拓展

7. 已知 $A(5,\ -1)$，$B(1,\ 1)$，$C(2,\ 3)$ 三点，试判断△ABC 的形状.

8. 求垂直于直线 $3x-4y-7=0$，且与两坐标轴围成三角形的周长为 10 的直线方程.

【高考链接】

（2009 年单招试题）设直线 l 经过点 $M(0,\ 1)$ 且与直线 $x-2y-3=0$ 垂直，则直线 l 的方程为（　　）

A. $2x+y+1=0$　　B. $2x+y-1=0$　　C. $x-2y+2=0$　　D. $x+2y-2=0$

8.7　点到直线的距离公式

【学习目标】

1．知识目标：（1）了解点到直线距离公式的推导过程，掌握点到直线的距离公式；
（2）会运用点到直线的距离公式求解两平行线间的距离.

2．能力目标：通过灵活运用公式的过程，提高学生类比、化归、数形结合的能力.

【知识精要】

1. 点到直线的距离公式

点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

注意 公式中的直线方程应为一般式，若给出其他形式，应先化成一般式再用公式.

2. 两平行线间的距离公式

已知两条平行线直线 l_1 和 l_2 的一般式方程为 l_1：$Ax+By+C_1=0$，l_2：$Ax+By+C_2=0$，则 l_1 与 l_2 的距离为 $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

3. 两点关于直线 l 的对称

若两点 $P(a,\ b)$，$P'(a',\ b')$ 关于直线 l 对称，则 $PP'\perp l$ 且 P 与 P' 到 l 的距离相等.

【基础过关】

1. 点 $P(3,\ 7)$ 到直线 $y=5$ 的距离是_____.
2. 点 $P(4,\ -3)$ 到直线 $x+y-5=0$ 的距离是_____.
3. 直线 $y-2=0$ 与 $y+7=0$ 的距离是_____.

【典型例题】

例 8-7-1　若点 $(1,\ a)$ 到直线 $4x-3y=1$ 的距离不大于 3，求实数 a 的取值范围.

【要点解析】 应用点到直线的距离公式时，直线方程应为一般式，若给出其他形式，应先化成一般式再用公式.

【解】 $\because d=\dfrac{|4\times1-3a-1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\leqslant3$，即 $\dfrac{|3-3a|}{5}\leqslant3$　$\therefore -4\leqslant a\leqslant6$

所以实数 a 的取值范围是：$a\in[-4,\ 6]$.

例 8-7-2　求两平行线 l_1：$5x+12y-10=0$，l_2：$5x+12y-8=0$ 的距离.

【要点解析】 求两平行直线间的距离有两种思路：

（1）利用“化归”法将两条平行线的距离转化为求一条直线上任意一点到另一条直线的距离.

（2）直接利用两平行线间的距离公式 $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，但必须注意两直线方程中 x，y 的系数对应相等.

【解】 **解法一** 在直线 l_1 上取一点 $P(2,\ 0)$，因为 $l_1\ /\!/\ l_2$，所以点 P 到 l_2 的距离等于 l_1 与 l_2 的距离，于是 $d=\dfrac{|5\times2+12\times0-8|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\dfrac{2}{13}$.

解法二 $l_1 // l_2$ 又 $C_1=-10$，$C_2=-8$.

由两平行线间的距离公式得 $d=\dfrac{|-10-(-8)|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\dfrac{2}{13}$.

例 8-7-3 求点 $P(2,\ 3)$ 关于直线 l：$2x-y-4=0$ 的对称点 P' 的坐标.

【要点解析】点关于直线对称问题，应抓住该直线为过其对称两点的线段的中垂线这一关键求解.

【解】 **解法一** 设 P' 的坐标为 $(a,\ b)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{b-3}{a-2}\times 2=-1\\ \dfrac{|2a-b-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|2\times 3-3-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}\end{cases}\quad\text{解得}\begin{cases}a=\dfrac{22}{5}\\ b=\dfrac{9}{5}\end{cases}$$

∴所求的对称点 $P'\left(\dfrac{22}{5},\ \dfrac{9}{5}\right)$.

解法二 设点 $P(2,\ 3)$ 关于直线 l 的对称点 P' 的为 $(a,\ b)$，则有 $PP'\perp l$ 且 PP' 的中点在直线 l 上，则

$$\begin{cases}\dfrac{b-3}{a-2}\times 2=-1\\ 2\times\dfrac{a+2}{2}-\dfrac{b+3}{2}-4=0\end{cases}\quad\text{解得}\begin{cases}a=\dfrac{22}{5}\\ b=\dfrac{9}{5}\end{cases}$$

∴所求的对称点 $P'\left(\dfrac{22}{5},\ \dfrac{9}{5}\right)$.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 点 $P(2,\ -1)$ 到直线 $y=2x$ 的距离是（　　）

A. $\dfrac{5}{2}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

2. 点 $P(2,\ m)$ 到直线 l：$5x-12y+6=0$ 的距离为 4，则 $m=$（　　）

A. 1　　B. −3　　C. 1 或 $\dfrac{5}{3}$　　D. −3 或 $\dfrac{17}{3}$

3. 直线 $y=2x$ 与直线 $y=2x+5$ 间的距离为（　　）

A. $\dfrac{5}{2}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. 5　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

4. 直线 $\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{6}=1$ 与 $y=\dfrac{3}{2}x+1$ 之间的距离是_____.

5. 点 $P(m,\ m+2)$ 与点 $(6,\ 4)$ 关于直线 $y=x$ 对称，则 $m=$_____.

6. 已知直线 l 经过点 $P(5,\ 10)$，且原点到它的距离为 5，则 l 的方程为_____.

7. 求过点 $M(-2,\ 1)$ 且与 $A(-1,\ 2)$，$B(3,\ 0)$ 两点距离相等的直线方程.

二、能力拓展

8. 在直线 $x+3y=0$ 上求一点 P，使它到原点的距离与到直线 $x+3y-2=0$ 的距离相等.

9. 求点 $A(-3,\ 4)$ 关于直线 $4x-y-1=0$ 的对称点 A' 的坐标.

【高考链接】

（2005 年单招试题）在△ABC 中，A 点的坐标为（2，1），BC 边在直线 $y=2x$ 上，则 BC 边上的高为（　　）

A. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

8.8　圆的方程（一）

【学习目标】

1．知识目标：（1）了解圆的定义，在直角坐标系中，探索并掌握圆的标准方程；
（2）会根据圆心坐标、半径熟练地写出圆的标准方程，以及从圆的标准方程熟练地求出圆心和半径；
（3）了解点与圆的位置关系.

2．能力目标：（1）进一步培养学生用代数方法研究几何问题的能力，加深对数形结合思想的理解和加强对待定系数法的运用；
（2）利用圆的标准方程解决简单的实际问题，加强学生理论联系实际的能力.

【知识精要】

1．圆的标准方程

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，其中圆心坐标为 $C(a,\ b)$，半径为 r．当圆心在原点即 $C(0,\ 0)$ 时，方程为 $x^2+y^2=r^2\ (r\neq 0)$.

2．点与圆的位置关系

（1）点$M(x_0,\ y_0)$到圆心$C(a,\ b)$的距离小于半径r，点在圆内

即$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$；

（2）点$M(x_0,\ y_0)$到圆心$C(a,\ b)$的距离等于半径r，点在圆上

即$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$（点的坐标满足圆的方程）；

（3）点$M(x_0,\ y_0)$到圆心$C(a,\ b)$的距离大于半径r，点在圆外

即$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$.

【基础过关】

1. 求下列圆的圆心和半径：

（1）$(x-3)^2+(y-2)^2=5$；　　（2）$(x+4)^2+(y+1)^2=7$；

（3）$(x+2)^2+y^2=4$；　　（4）$x^2+y^2=25$.

2.（1）圆心是$(0,\ 0)$，半径是3的圆的方程为_____.

（2）圆心是$(3,\ -3)$，半径是2的圆的方程为_____.

3．以$(3,\ 4)$为圆心，且过点$(0,\ 0)$的圆的方程为_____.

【典型例题】

例 8-8-1　（1）求圆心是$(3,\ 4)$，半径是5的圆的标准方程，并判断点$M(0,\ 0)$，$N(-1,\ -2)$是否在圆上；

（2）求经过点$P(5,\ 1)$，且圆心在点$C(8,\ -3)$的圆的标准方程.

【要点解析】能够用圆心坐标、半径熟练地写出圆的标准方程，第（2）小题解题的关键就是求半径，这里提供了两种解题方法.

【解】（1）∵圆心是$(3,\ 4)$，半径是5

∴所求圆的标准方程为$(x-3)^2+(y-4)^2=25$

将点$M(0,\ 0)$代入方程的左边得$(0-3)^2+(0-4)^2=25$

即点$M(0,\ 0)$的坐标适合方程　∴点$M(0,\ 0)$在圆上.

将点$N(-1,\ -2)$代入方程的左边得$(-1-3)^2+(-2-4)^2=52>25$

即点$N(-1,\ -2)$的坐标不适合方程　∴点$N(-1,\ -2)$不在圆上.

（2）**方法一**∵点$P(5,\ 1)$在圆上，圆心坐标为$C(8,\ -3)$

∴圆的半径$r=\sqrt{(5-8)^2+(1+3)^2}=5$

∴所求圆的标准方程为$(x-8)^2+(y+3)^2=25$.

方法二∵圆心坐标为$C(8,\ -3)$



∴设圆的方程为 $(x-8)^2+(y+3)^2=r^2$

∵点 $P(5,\ 1)$ 在圆上即点 P 的坐标满足圆的方程

∴ $(5-8)^2+(1+3)^2=r^2$ 即 $r^2=25$

∴所求圆的标准方程为 $(x-8)^2+(y+3)^2=25$.

例 8-8-2　（1）求圆心在点 $C(1,\ 3)$，并且和 y 轴相切的圆的方程；

（2）求过点 $(0,\ 1)$ 和点 $(2,\ 1)$，半径为 $\sqrt{5}$ 的圆的方程.

【要点解析】求圆的方程的方法：

（1）定义法：直接根据圆心坐标和半径写出圆的标准方程；

（2）待定系数法，步骤是：

① 设圆的标准方程为：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$；

② 由条件列方程（组）解之，得 a，b，r 的值；

③ 写出圆的标准方程.

【解】（1）∵圆与 y 轴相切

∴该圆的半径即为圆心 $C(1,\ 3)$ 到 y 轴的距离为 1

∴所求圆的方程为 $(x-1)^2+(y-3)^2=1$.

（2）设圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=5$

已知圆过点 $(0,\ 1)$ 和点 $(2,\ 1)$，代入圆的方程，得

$$\begin{cases}(0-a)^2+(1-b)^2=5\\(2-a)^2+(1-b)^2=5\end{cases}\text{ 解得 }\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}\text{ 或}\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$$

故所求圆的方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=5$ 或 $(x-1)^2+(y-3)^2=5$.

例 8-8-3　求经过 $A(6,\ 0)$，$B(1,\ 5)$ 两点，且圆心在直线 $l:2x-7y+8=0$ 上的圆的标准方程.

【要点解析】（1）确定圆的方程需要三个独立条件，所以通过待定系数法直接利用条件求解.

（2）利用垂直平分弦的直线必定经过圆心这一定理求解.

【解】**解法一**设圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，则

$$\begin{cases}(6-a)^2+(0-b)^2=r^2\\(1-a)^2+(5-b)^2=r^2\\2a-7b+8=0\end{cases}\text{ 解得}\begin{cases}a=3\\b=2\\r=\sqrt{13}\end{cases}$$

∴所求圆的标准方程为：$(x-3)^2+(y-2)^2=13$.

解法二线段 AB 的中点坐标为 $\left(\frac{7}{2},\ \frac{5}{2}\right)$，直线 AB 的斜率 $k_{AB}=-1$

∴线段 AB 的中垂线方程为 $x-y-1=0$，这条直线必经过圆心

故联立方程组 $\begin{cases}x-y-1=0\\2x-7y+8=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$

所以圆心坐标为 $C(3,\ 2)$

$\therefore$ 半径 $r=|CA|=\sqrt{(6-3)^2+(0-2)^2}=\sqrt{13}$

故所求圆的标准方程为：$(x-3)^2+(y-2)^2=13$.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 圆 $C:(x-2)^2+(y+1)^2=3$ 的圆心坐标是 （　　）

A．$(2,\ 1)$　　B．$(2,\ -1)$　　C．$(-2,\ 1)$　　D．$(-2,\ -1)$

2. 圆心为 $(0,\ 4)$，且过点 $(3,\ 0)$ 的圆的方程为 （　　）

A．$x^2+(y-4)^2=25$　　B．$x^2+(y+4)^2=25$

C．$(x-4)^2+y^2=25$　　D．$(x+4)^2+y^2=25$

3. 已知圆的方程为 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$，则点 $P(3,\ 2)$ （　　）

A．是圆心　　B．在圆上　　C．在圆内　　D．在圆外

4. 圆 $C:(x-\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{3})^2=4$ 的面积等于 （　　）

A．π　　B．2π　　C．4π　　D．8π

5. 圆心在直线 $2x-3y+5=0$ 上，且与两坐标轴都相切的圆的标准方程为 （　　）

A．$(x-5)^2+(y-5)^2=25$　　B．$(x+1)^2+(y-1)^2=1$

C．$(x-5)^2+(y-5)^2=25$ 或 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$　　D．不存在

6. 求经过两点 $(3,\ 5)$，$(-3,\ 7)$ 且圆心在 x 轴上的圆的方程.

二、能力拓展

7. 若点 $P(1,\ 1)$ 为圆 $(x-3)^2+y^2=9$ 的弦 MN 的中点，则弦 MN 所在的直线方程为（　　）

A．$2x+y-3=0$　　B．$x-2y+1=0$

C．$x+2y-3=0$　　D．$2x-y-1=0$

8. 圆与直线 $2x+3y-10=0$ 相切于点 $P(2,\ 2)$，并且过点 $M(-3,\ 1)$，求圆的标准方程.

【高考链接】

（2001 年单招试题）圆 $x^2+y^2=1$ 上的点到直线 $3x+4y-25=0$ 的距离的最大值为_____.

8.9　圆的方程（二）

【学习目标】

1．知识目标：（1）掌握圆的一般方程，会正确判断方程是否表示圆；
（2）会利用配方法将圆的一般方程化为标准方程，并确定圆心和半径；
（3）能用待定系数法由已知条件求出圆的方程.

2．能力目标：通过对方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的条件的探究，培养学生探索发现及分析解决实际问题的能力.

【知识精要】

1. 将方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 配方，得 $(x+\frac{D}{2})^2+(y+\frac{E}{2})^2=\frac{1}{4}(D^2+E^2-4F)$.

当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，表示一个圆，圆心坐标为 $\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$，半径为 $r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$；

当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，表示一个点 $\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$；

当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，不表示任何图形.

圆的一般方程为：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$　（$D^2+E^2-4F>0$）.

注意 对于圆的一般方程

（1）x^2 和 y^2 的系数相等且都不为 0（常都化为 1）；

（2）不含 xy 这样的二次项；

（3）方程表示圆的前提条件是 $D^2+E^2-4F>0$.

2. 圆的一般方程的确定

只需求出三个系数 D、E、F 根据条件列出关于 D、E、F 的三个方程，解三元一次方程组，求出 D、E、F. 如用待定系数法求圆的方程，若已知圆上三点用一般式比用标准式在运算上简单；但若已知圆心和半径，利用标准方程更方便.

【基础过关】

1. 求下列圆的圆心坐标和半径：

（1）$x^2+y^2+4x=0$；　　（2）$x^2+y^2-6y=0$；

（3）$x^2+y^2-2ax=0\ (a\neq 0)$；　　（4）$x^2+y^2+6by=0\ (b\neq 0)$.

2. 下列方程各表示什么图形？

（1）$x^2+y^2=0$；　　（2）$x^2+y^2-2x+4y-6=0$.

3. 求过三点 $A(2,\ 2)$，$B(5,\ 3)$，$C(3,\ -1)$ 的圆的方程.

【典型例题】

例 8-9-1 下列各方程表示什么图形？若表示圆，求出圆心和半径.

（1）$x^2+y^2+x+1=0$;

（2）$x^2+y^2+2ac+a^2=0$ ($a\neq0$);

（3）$2x^2+2y^2+2ax-2ay=0$ ($a\neq0$).

【要点解析】判断二元二次方程表示为圆的方程，除了根据 $D^2+E^2-4F>0$ 外，也可以先将方程配方再判断.

【解】（1）$\because D=1$，$E=0$，$F=1$

$\therefore D^2+E^2-4F<0$

∴此方程不表示任何图形.

（2）$\because D=2a$，$E=0$，$F=a^2$，

$\therefore D^2+E^2-4F=4a^2-4a^2=0$，

∴此方程表示点$(-a,\ 0)$.

（3）两边同时除以 2，得 $x^2+y^2+ax-ay=0$，

$\therefore D=a$，$E=-a$，$F=0$

$\therefore D^2+E^2-4F>0$

∴此方程表示圆，圆心为 $(-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2})$，半径 $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}=\frac{\sqrt{2}}{2}|a|$.

例 8-9-2 已知△ABC 的三个顶点 $A(1,\ -1)$、$B(1,\ 4)$、$C(4,\ -2)$，求△ABC 的外接圆的方程、外心坐标和外接圆半径.

【要点解析】用待定系数法的一般步骤是“设（设含待定系数的方程）→列（利用条件列出系数所满足的方程组）→求（解方程组）→写（写出所求方程）”. 当已知圆上三点或两点时，选用圆的一般方程形式较为简单. 当已知圆心和半径时，选用圆的标准方程形式易求解.

【解】设△ABC 的外接圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

$\because A(1,\ -1)$，$B(1,\ 4)$，$C(4,\ -2)$ 三点在圆上，代入圆的方程并化简，得

$$\begin{cases}D-E+F=-2\\D+4E+F=-17\\4D-2E+F=-20\end{cases}$$，解得 $D=-7$，$E=-3$，$F=2$

$\therefore$△ABC 的外接圆的方程为 $x^2+y^2-7x-3y+2=0$



即 $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$

∴外心坐标为 $\left(\frac{7}{2},\ \frac{3}{2}\right)$，外接圆半径为 $\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

例 8-9-3　求经过 $A(4,\ 2)$，$B(-1,\ 3)$ 两点，且在两坐标轴上的四个截距之和为 4 的圆的方程.

【要点解析】本题的条件和圆心、半径没有关系，所以运用待定系数法求圆的一般方程. 理解圆在坐标轴上的截距.

【解】设所求圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

当 $x=0$ 时，$y^2+Ey+F=0$，则 $y_1+y_2=-\frac{E}{2}$

当 $y=0$ 时，$x^2+Dx+F=0$，则 $x_1+x_2=-\frac{D}{2}$

则 $\begin{cases}16+4+4D+2E+F=0\\1+9-D+3E+F=0\\(-\frac{D}{2})+(-\frac{E}{2})=4\end{cases}$，解得 $\begin{cases}D=-3\\E=-5\\F=2\end{cases}$

∴ 圆的方程为 $x^2+y^2-3x-5y+2=0$.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 圆 $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ 的圆心坐标和半径分别为　（　　）

A. $(3,\ -2)$，$r=5$　　B. $(-3,\ 2)$，$r=\sqrt{5}$

C. $(3,\ -2)$，$r=\sqrt{5}$　　D. $(-3,\ 2)$，$r=5$

2. 方程 $x^2+y^2+4x-2y+5m=0$ 表示圆的条件是　（　　）

A. $\frac{1}{4}<m<1$　　B. $m>1$　　C. $m<\frac{1}{4}$　　D. $m<1$

3. 已知圆 $x^2+y^2-10x-4my=0$ 的圆心在直线 $3x-2y+1=0$ 上，则 $m=$　（　　）

A. -4　　B. 4　　C. 8　　D. -8

4. 圆 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ 的圆心到直线 $x-y=1$ 的距离为　（　　）

A. 2　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

5．已知圆 C_1：$x^2+y^2=4$ 和圆 C_2：$x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 关于直线 l 对称，则直线 l 的方程为_____.

6. 已知直线 $y=2x+4$ 与 x、y 轴分别交于 A、B 两点，则以线段 AB 为直径的圆的一般方程为_____.

二、能力拓展

7. 求过原点及 $A(-2,\ 1)$ 且在 y 轴上截得的线段长为3的圆的方程.

8．求经过点 $A(-2,\ -4)$，且与直线 l：$x+3y-26=0$ 相切于点 $B(8,\ 6)$ 的圆的方程.

【高考链接】

（1999 年单招试题）圆 $x^2+y^2-4x+6y+8=0$ 的圆心坐标是_____.

8.10 直线和圆的位置关系（一）

【学习目标】

1．知识目标：（1）理解直线与圆的位置关系，并能熟练使用几何法和代数法来判断直线与圆的位置关系；

（2）会求经过圆上一点或圆外一点的圆的切线的方程.

2．能力目标：（1）通过对直线与圆的位置关系的探索活动，经历知识的建构过程，培养学生独立思考，自主探究，动手实践，合作交流的学习方式；

（2）强化学生用解析法解决几何问题的意识，培养学生分析问题和灵活解决问题的能力.

【知识精要】

1. 直线与圆的位置关系

已知直线 l：$Ax+By+C=0$ 和圆 C：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ (r>0)$.

（1）几何方法

圆心 $(a,\ b)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，则判别直线与圆的位置关系的依据有以下几点：

当 $d>r$ 时，直线 l 与圆 C 相离；

当 $d=r$ 时，直线 l 与圆 C 相切；

当 $d<r$ 时，直线 l 与圆 C 相交.

（2）代数方法

由 $\begin{cases}Ax+By+C=0\\(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\end{cases}$ 消去 y（或 x）得到一个关于 x（或 y）的一元二次方程，则对根的判别式 Δ：

当 $\Delta>0$ 时，直线 l 与圆 C 相交；

当 $\Delta=0$ 时，直线 l 与圆 C 相切；

当 $\Delta<0$ 时，直线 l 与圆 C 相离.

2. 圆的切线方程

（1）若点 $(x_0,\ y_0)$ 在圆 $x^2+y^2=r^2$ 上时，则切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$；

若点 $(x_0,\ y_0)$ 在圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上时，则切线方程为

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$$

（2）已知直线的斜率 k 求切线方程，可设直线方程为斜截式 $y=kx+b$，利用 $d=r$ 或 $\Delta=0$ 可求得待定系数 b.

（3）已知圆外一点 $P(x_1,y_1)$ 求过点 P 的切线方程，可设切线方程为 $y-y_1=k(x-x_1)$，再利用 $d=r$ 或 $\Delta=0$ 求出 k. 但注意切线有两条，如果求出只有一个 k，另一条应与 x 轴垂直，不能漏掉特殊情况的解.

【基础过关】

1. 直线与圆的位置关系有_____，_____，_____.

2. 已知圆 C 的直径是 6cm，圆 C 到直线 l 的距离是 4cm，则圆 C 与直线 l 的位置关系是_____.

3. 直线 $3x+4y-10=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 的位置关系是_____.

【典型例题】

例 8-10-1　已知直线 l：$3x+y-6=0$ 和圆 C：$x^2+(y-1)^2=5$，试判断直线 l 与圆 C 有无公共点，有几个公共点.

【要点解析】几何方法或代数方法都可以判断直线与圆的公共点的个数.

【解】解法一　$\because r=\sqrt{5}$，圆心 $C\ (0,\ 1)$ 到直线 l：$3x+y-6=0$ 的距离为

$d=\dfrac{|3\times0+1-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}<\sqrt{5}$，即 $d<r$

∴直线 l 与圆 C 相交，故直线 l 与圆 C 有两个公共点.

解法二 解方程组 $\begin{cases}3x+y-6=0\\x^2+(y-1)^2=5\end{cases}$ 消去 y，得 $x^2-3x+2=0$

∴ $x=1$ 或 $x=2$

∴ $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$

或 $\Delta=(-3)^2-4\times1\times2=1>0$

∴直线 l 与圆 C 有两个公共点.

例 8-10-2 求直线 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$ 截圆 $x^2+y^2=4$ 得的劣弧所对的圆心角.

【要点解析】例题体现了直线与圆相交的基本知识，以及正三角形的性质及逻辑思维能力和数形结合思想，同时也体现了数形结合思想的简捷性. 如果注意到直线 AB 的倾斜角为 120°，则等腰△OAB 的底角为 60°，因此∠$AOB=60°$，更加体现出平面解析几何的意义.

【解】如图 8-10-1 所示，

由 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0\\x^2+y^2=4\end{cases}$

消 y 得：$x^2-3x+2=0$

∴ $x=1$ 或 $x=2$

∴A（2，0），B（1，$\sqrt{3}$）

∴$|AB|=\sqrt{(2-1)^2+(0-\sqrt{3})^2}=2$

又$|OB|=|OA|=2$

∴△AOB 是等边三角形　∴∠$AOB=\dfrac{\pi}{3}$

∴所求的圆心角为 $\dfrac{\pi}{3}$.

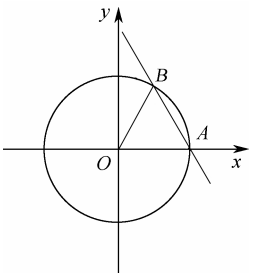


图 8-10-1

例 8-10-3 过 $P(4,5)$ 向圆 C：$x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 引切线 l，求切线 l 的方程.

【要点解析】先判断点与圆的位置关系，确定切线的条数，然后设出直线方程，根据直线和圆相切是圆心到直线的距离等于半径求出未知数，但是要注意讨论切线的斜率是否存在. 当然本题也可用代数法求解.

【解】圆 C：$x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 转化成标准方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=9$

当直线 l 垂直于 x 轴时，直线 l：$x=4$ 与圆相切，满足条件.

当直线 l 不垂直于 x 轴时，可设直线 l 的方程为 $y-5=k(x-4)$，即 $kx-y-4k+5=0$.

∵直线 l 与圆 C 相切

∴圆心 $(1,-2)$ 到直线 l 的距离等于圆的半径

∴ $d=\dfrac{|-3k+7|}{\sqrt{1+k^2}}=3$　∴ $k=\dfrac{20}{21}$　∴ $y=\dfrac{20}{21}x+\dfrac{25}{21}$ 即 $20x-21y+25=0$

∴所求切线方程为 $x=4$ 和 $20x-21y+25=0$.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 直线 $2x+y-1=0$ 与圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 的位置关系为　　（　　）

A．相交　　B．相切　　C．相离　　D．无法确定

2. 直线 $x+y=1$ 与圆 $x^2+y^2-2ay=0(a>0)$ 没有公共点，则 a 的取值范围是　　（　　）

A．$(0,\sqrt{2}-1)$　　B．$(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1)$

C．$(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1)$　　D．$(0,\sqrt{2}+1)$

3. 过圆 $x^2+y^2=12$ 上一点（2，$2\sqrt{2}$ ）的切线方程为_____.

4. 设直线过点 $(0,a)$，其斜率为 1，且与圆 $x^2+y^2=2$ 相切，则 a 的值为_____.

5. 圆 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$ 上到直线 $3x+4y-11=0$ 的距离为 1 的点共有_____个.

6. 过点 $P(3,5)$ 向圆 $x^2+y^2=5$ 作切线，切线长为_____.

7. 设 P 为圆 $x^2+y^2=1$ 上的动点，求点 P 到直线 $3x-4y-10=0$ 的距离的最小值.

二、能力拓展

8. 求过点 $A(-1,4)$ 与圆 C：$(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 相切的直线方程.

9. 自点 $A(-3,-3)$ 发出的光线 l 射到 x 轴上，被 x 轴反射，其反射光线所在直线与圆 C：$x^2+y^2-4x+4y+7=0$ 相切，求光线 l 所在的直线方程.

【高考链接】

（2012 年单招试题）若过点 $A(3,\ 0)$ 的直线 l 与圆 C：$(x-1)^2+y^2=1$ 有公共点，则直线 l 斜率的取值范围为（　　）

A．$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$　　B．$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　C．$(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$　　D．$[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$

8.11　直线和圆的位置关系（二）

【学习目标】

1．知识目标：掌握几何法和代数法求圆的弦长及弦长公式.

2．能力目标：提高学生运算求解、综合分析问题的能力.

【知识精要】

弦长问题

直线 l：$Ax+By+C=0$ 和圆 C：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 相交所得弦为 MN .

（1）圆心 $(a,\ b)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离 d，则弦长满足 $|MN|=2\sqrt{r^2-d^2}$；

（2）由 $\begin{cases}Ax+By+C=0\\(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\end{cases}$ 消去 y（或 x）得到一个关于 x（或 y）的一元二次方程 $a_1x^2+b_1x+c=0$，x_1，x_2 为该一元二次方程的两个根，则

$$|MN|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\,\frac{\sqrt{\Delta}}{|a_1|}$$

（或 $|MN|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\ \ |y_1-y_2|$）

其中，k 为弦所在直线的斜率，Δ 为方程 $a_1x^2+b_1x+c=0$ 的判别式.

【基础过关】

1. 圆 $x^2+y^2=16$ 上的点到直线 $x-y=2$ 的距离的最大值是_____.

2. 圆 $x^2+y^2=4$ 内一点 $P(1,\ 0)$，则过 P 点最短弦所在的直线方程是_____.

3. 圆心为(1，−2)、半径为 $2\sqrt{5}$ 的圆在 x 轴上截得的弦长为_____.

【典型例题】

例 8-11-1　求直线 l：$2x+y-1=0$ 被圆 C：$(x-4)^2+(y+2)^2=9$ 截得的弦长.

【要点解析】本例题用弦心距、半径、弦长的一半构成直角三角形这一几何性质求解，比较简捷. 应用代数法结合两点间的距离公式求解计算量比较大，但该种方法具有通性，对以后直线与其他二次曲线相交求弦长时仍然适用.

【解】 方法一　设直线 l 与圆 C 相交于 A、B 两点，且圆心 $(4,\ -2)$ 到直线 l 的距离为弦心距 d，则 $d=\dfrac{|2\times4+(-2)-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$　$\therefore |AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{9-5}=4$.

方法二　联立方程组 $\begin{cases}2x+y-1=0\\(x-4)^2+(y+2)^2=9\end{cases}$ 消去 y 得 $5x^2-20x+16=0$

设 x_1，x_2 为方程 $5x^2-20x+16=0$ 的两个根

$\therefore$ 弦长为 $\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{1+(-2)^2}\times\dfrac{\sqrt{20^2-4\times5\times16}}{|5|}=\sqrt{5}\times\dfrac{4\sqrt{5}}{5}=4$.

例 8-11-2　已知直线 l：$kx-y+2=0$ 被圆 C：$x^2+y^2=5$ 所截得的弦长为 4，求 k 的值.

【要点解析】可利用圆心距、半径、弦长的一半构成直角三角形这一几何性质求解，与上一题是反向的应用.

【解】由题意得：圆心到直线 l 的距离为弦心距 $d=\dfrac{|2|}{\sqrt{k^2+1}}$

$\therefore\left(\dfrac{2}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2+\left(\dfrac{4}{2}\right)^2=5$，解得 $k=\pm\sqrt{3}$

$\therefore k=\pm\sqrt{3}$.

例 8-11-3　已知直线 $y=mx$ 与圆 $x^2+y^2+8x-6y+21=0$ 交于 P，Q 两点，O 为坐标原点，求 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的值.

【要点解析】本题将直线和圆相交的问题与向量巧妙结合. 其中设而不求是解决这类问题最常用的方法.

【解】设 $P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$，则 $y_1=mx_1$，　$y_2=mx_2$

由 $\begin{cases}y=mx\\x^2+y^2+8x-6y+21=0\end{cases}$ 消去 y，得 $(1+m^2)x^2+(8-6m)x+21=0$

则根据韦达定理得：$x_1+x_2=\dfrac{6m-8}{1+m^2}$，$x_1x_2=\dfrac{21}{1+m^2}$

故 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+m^2x_1x_2=(1+m^2)x_1x_2=21$，即 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=21$.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 直线 $3x-y-2=0$ 被圆 $(x+2)^2+(y-2)^2=26$ 截得的弦长为_____.

2. 已知圆 $(x-1)^2+y^2=4$ 内一点 $P(2,\ 1)$，则过 P 点最短弦所在的直线方程是_____.

3. 设直线 $y=3$ 与圆 $(x-1)^2+(y-b)^2=4$ 相交于 A、B 两点，且弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$，则 $b=$_____.

4. 直线 l：$kx-y+3=0$ 截圆 C：$x^2+y^2+6x-2y+1=0$ 得的弦长为 $2\sqrt{5}$，则 $k=$_____.

5. 直线 $x+y=1$ 被圆 $x^2+y^2+2x-2y-11=0$ 所截得线段的中点是_____.

6. 若点 $M(1,\ -3)$ 是圆 C：$x^2+(y+2)^2=16$ 的弦 AB 的中点，求直线 AB 的方程.

二、能力拓展

7. 已知直线 l 过点 $A(4,\ 0)$，且被圆 C：$(x+3)^2+(y-1)^2=4$ 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，求直线 l 的方程.

8. 已知圆 C 过点 $(1,\ 0)$，且圆心在 x 轴的正半轴上，直线 l：$y=x-1$ 被圆 C 所截得的弦长为 $2\sqrt{2}$，求圆 C 的方程.

【高考链接】

（1998 年单招试题）直线 $y-2x+5=0$ 与圆 $x^2+y^2-4x+2y+2=0$ 之间关系是（　　）

A．相离　　B．相切　　C．相交但不过圆心　　D．相交且过圆心

8.12　直线与圆的方程应用举例

【学习目标】

1．知识目标：（1）理解直线与圆的位置关系的几何性质；会用适当的方法解决直线与圆的位置关系问题；

（2）能利用直线和圆的方程解决简单实际问题，并体会坐标法的作用.

2．能力目标：让学生认识数学与人类生活的密切联系，培养学生应用所学的数学知识解决实际问题的能力.

【知识精要】

1．解决应用问题的步骤

（1）审题——分清条件和结论，将实际问题数学化；

（2）建模——将文字语言转化成数学语言或图形语言，找到与此相联系的数学知识，建立数学模型；

（3）解模——求解数学问题，得出数学结论；

（4）还原——根据实际意义检验结论，还原为实际问题.

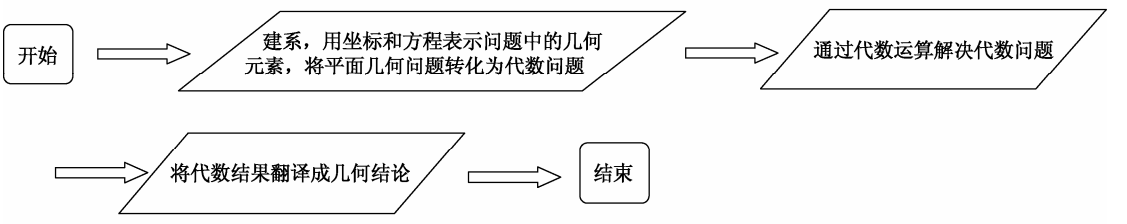
流程图：

实际问题 ⟹ 数学问题 ⟹ 数学结论 ⟹ 实际问题结论

（审题）　（建模）　（解模）　（还原）

2．解析法解决平面几何问题的步骤

首先建立适当的坐标系，将几何问题代数化；用代数语言描述几何要素及其关系，进而将几何问题转化为代数问题；处理代数问题；分析代数结果的几何含义，最终解决几何问题；我们把这种方法叫做“坐标法”，又称“解析法”. 坐标法解决平面几何问题的步骤，可用下面的算法流程图表示：



【基础过关】

1. 如图 8-12-1 所示，在方格纸上建立平面直角坐标系，线段 AB 的两个端点都在格点上，直线 MN 经过坐标原点，且点 M 的坐标是(1，2).

（1）写出点 A，B 的坐标；

（2）求直线 MN 的方程.

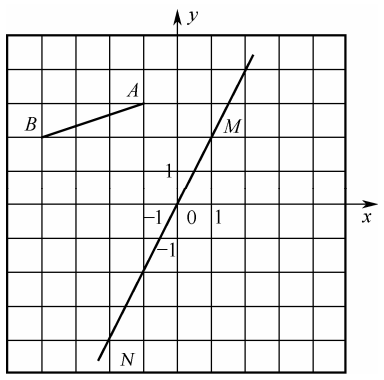


图 8-12-1

2. 如图 8-12-2 所示，若在象棋盘上建立平面直角坐标系，使“将”位于点(1，－2)，“象”位于点(3，－2)，请画出平面直角坐标系，并找出“炮”的坐标.

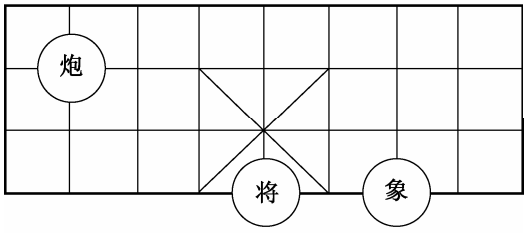


图 8-12-2

3．学校操场 400m 跑道的直道长为 86.96m，弯道是两个半圆弧，半径为 36m，以操场中心为坐标原点建立如图 8-12-3 所示的直角坐标系，求弯道所在的圆的方程.

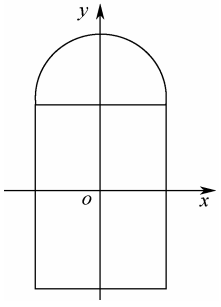


图 8-12-3

【典型例题】

例 8-12-1　位于河北省的古代名桥赵州桥的跨度是 37.4m，圆拱高 7.2m. 如果坐标原点取在圆拱两端点连线的中点处，求这座圆拱桥的拱圆方程.

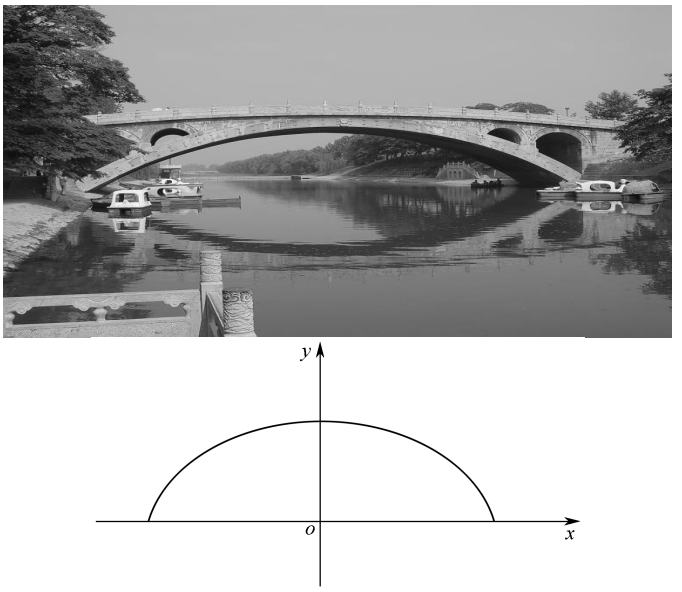


图 8-12-4

【要点解析】解决本题需要将实际问题转化为几何问题，建立平面直角坐标系，将圆上三个点直接代入圆的方程求解.

【解】建立如图 8-12-4 所示平面直角坐标系

由题意可设拱圆方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

圆拱两端点坐标分别为 $(-18.7,\ 0)$ 和 $(18.7,\ 0)$，圆拱顶坐标为 $(0,\ 7.2)$，它们都在拱圆上，则 $\begin{cases}18.7^2+18.7D+F=0\\18.7^2-18.7D+F=0\\7.2^2+7.2E+F=0\end{cases}$　解得 $\begin{cases}D=0\\E=41.4\\F=-349.7\end{cases}$

∴这座圆拱桥的拱圆方程为 $x^2+y^2+41.4y-349.7=0$

例 8-12-2　2012 年 10 月 24 日 12 时一飓风中心在某港口南偏东 60° 方向上，距港口 400km 的海面上形成，并以每小时 25km 的速度向正北方向移动，距飓风中心 350km 以内的范围将受飓风影响，请你预报该港口是否受飓风影响及受影响的时间段.

【要点解析】针对这个类型问题即直线与圆的方程在生产、生活实践中应用问题，关键用坐标法将实际问题转化为数学问题，最后还原为实际问题.

【解】以该港口为原点，正东方向、正北方向分别为 x、y 轴的正方向，建立如图 8-12-5 所示的直角坐标系.

则飓风形成时飓风中心坐标为 $P_0(200\sqrt{3},\ -200)$，飓风中心在直线 $x=200\sqrt{3}$ 上移动，飓风形成 t 小时后，飓风中心 $P(200\sqrt{3},\ -200+25t)$，由题得知，当 $|OP|<350$ 时，该港口受飓风

影响，即 $(200\sqrt{3})^2+(-200+25t)^2<350^2$，整理得 $t^2-16t+60<0$，解得 $6<t<10$，即 10 月 25 日 18 时该港口开始受飓风影响，22 时飓风退出该市.

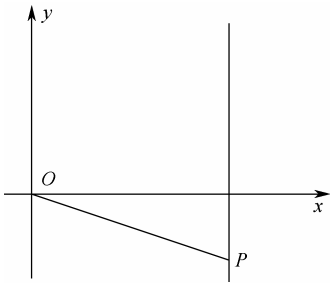


图 8-12-5

例 8-12-3 某城市交通规划中，拟在半径为 50m 的高架圆形道侧某处开一个出口，以与圆形道相切的方式，引伸一条直道接到距圆形道圆心正北 150m 处的道路上（如图 8-12-6 所示），试建立适当坐标系写出所引伸直道的方程，并计算出口应开在圆形道何处.

【要点解析】将实际问题转化为几何问题，建立适当的直角坐标系，通过求切点在圆上的切线方程计算出口的位置.

【解】以圆形道圆心 O 为原点，正北方向为 y 轴正向，建立如图所示的直角坐标系，则圆形道的方程为 $x^2+y^2=50^2$，引伸道与北向道路的交接点 C 的坐标为(0，150)，设出口开在圆形道上的点 $P(x_0,\ y_0)$ 处，则切线 PC 的方程为：$x_0x+y_0y=50^2$ 过 $C(0,\ 150)$

$\therefore y_0=\dfrac{50}{3}$　　$\therefore P\left(x_0,\ \dfrac{50}{3}\right)$

$\because P$ 在圆 O 上　$\therefore x_0^{\,2}+\left(\dfrac{50}{3}\right)^2=50^2$

$x_0=\pm\dfrac{100}{3}\sqrt{2}$

据实际问题，因为点 P 在圆心 O 东侧，故 $x_0=\dfrac{100}{3}\sqrt{2}$

$\therefore$ 引伸道在所建直角坐标系中的方程为 $\dfrac{50}{3}(2\sqrt{2}x+y)=50^2$

即 $2\sqrt{2}x+y-150=0$　　出口 $P(\dfrac{100}{3}\sqrt{2},\ \dfrac{50}{3})$.

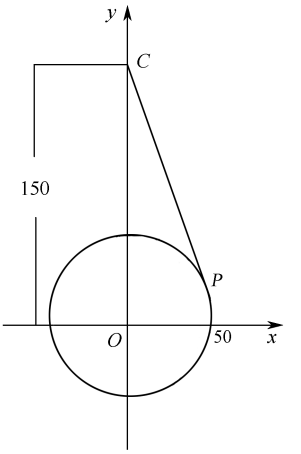


图 8-12-6

【巩固提高】

一、强化训练

1. 已知点 $A(-1,\ 1)$ 和圆 C：$(x-5)^2+(y-7)^2=4$，一束光线从点 A 出发经 x 轴反射到圆周 C 的最短路程是　　（　　）

A. 8　　B. 10　　C. $4\sqrt{6}$　　D. $6\sqrt{2}-2$

2. 一动点到 $A(-4, 0)$ 的距离是到 $B(2, 0)$ 的距离的 2 倍，则动点的轨迹方程　（　　）

A．$(x-4)^2+y^2=4$　　B．$(x-4)^2+y^2=16$

C．$x^2+(y-4)^2=4$　　D．$x^2+(y-4)^2=16$

3. 一辆卡车宽 2.7m，要经过一个半径为 4.5m 的半圆形隧道（双车道，不得违章），则这辆卡车的平顶车篷篷顶距离地面的高度不得超过　（　　）

A. 1.4m　　B. 3.0m　　C. 3.6m　　D. 4.5m

4. 台风中心从 A 地以每小时 20km 的速度向东北方向移动，离台风中心 30km 地区为危险区，城市 B 在 A 地正东 40km，则城市 B 处于危险区内的时间是　（　　）

A. 0.5h　　B. 1h　　C. 1.5h　　D. 2h

5. 圆 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 上的点到直线 $x-y-2=0$ 的距离最大值是　（　　）

A. 2　　B. $1+2\sqrt{2}$　　C. $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $1+\sqrt{2}$

6. 某地在一公路同侧有 A、B 两个村庄，相距 $2\sqrt{2}$ km，A、B 两个村庄到公路的距离分别为 1km 和 3km，现在公路上建一车站，使车站到两个村庄的距离之和最小，请你帮忙选择车站的位置.

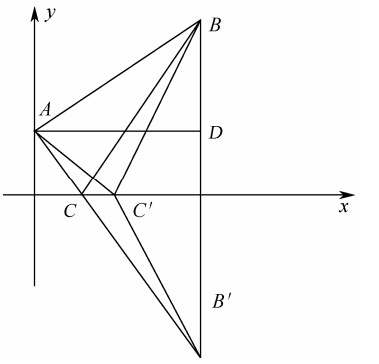


图 8-12-7

二、能力拓展

7. 某圆拱桥的水面跨度为 20m，拱高 4m，现有一船，宽 10m，水面以上高 3m，这条船能否从桥下通过？

8. 船行驶前方的河道上有一座圆拱桥，在正常水位时，拱圈最高点距水面为 9m，拱圈内水面宽 22m. 船只在水面以上部分高 6.5m、船顶部宽 4m，船通行无阻. 近日水位暴涨了 2.7m，船已经不能通过桥洞了. 船员必须加重船载，降低船身. 试问船身必须降低多少，才能顺利地通过桥洞？

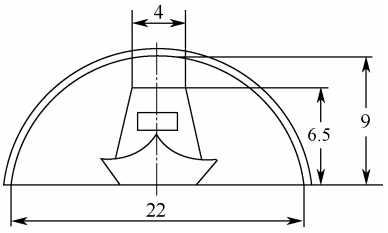


图 8-12-8

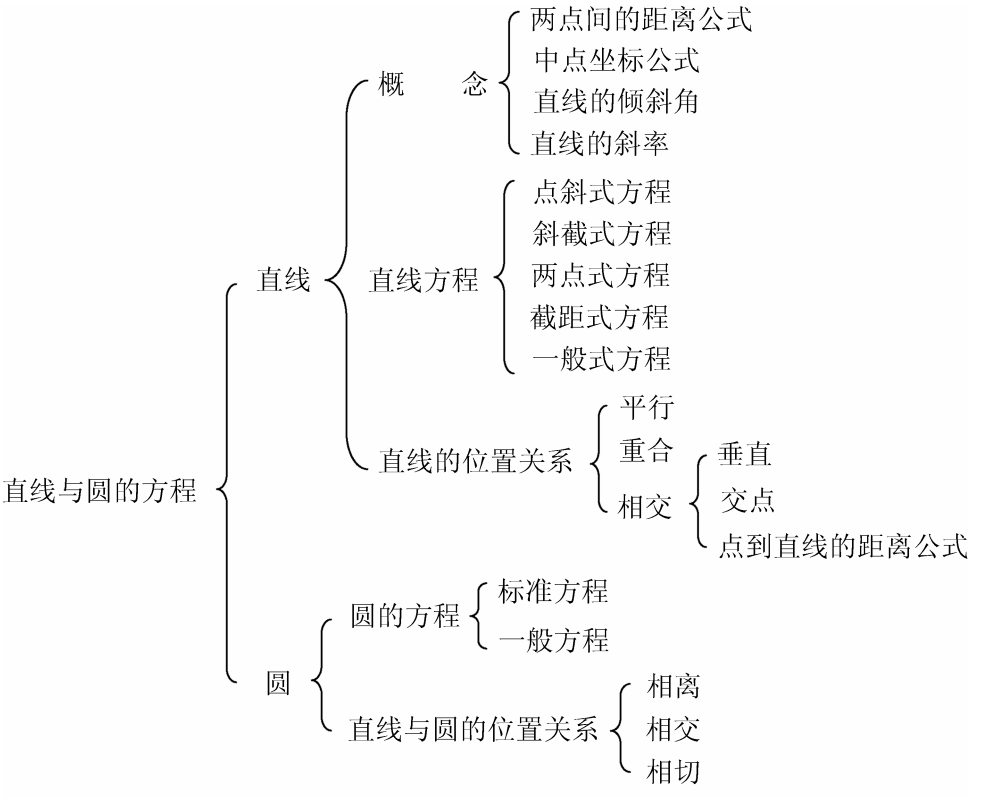
【高考链接】

（2007 年单招试题）与圆 $C:x^2+(y+5)^2=3$ 相切，且纵截距和横截距相等的直线共有（　　）

A. 2 条　　B. 3 条　　C. 4 条　　D. 6 条

本章小结与复习

【知识结构】



【考纲解读】

从近几年的单招试题看，试题主要集中在两直线的位置关系，直线与圆的位置关系，圆与圆的位置关系．从题型看，以选择题、填空题为主，教学中要关注新旧知识间的联系，引导学生通过类比、归纳、综合等方法的运用，培养学生分析、综合运用能力和计算技能．

考　点	要　求
两点间的距离公式及中点坐标公式	掌　握
直线的斜率和倾斜角	理　解
直线方程	掌　握
两条直线的位置关系	理　解
点到直线的距离公式	了　解
圆的方程	掌　握
直线与圆的位置关系	理　解
直线与圆的方程的实际应用	理　解

【考题剖析】

例 8-1 （2012 年单招试题）若直线 l 过点 $(-1,\ 2)$ 且与直线 $2x-3y+1=0$ 平行，则 l 的方程是（　　）

A．$3x+2y+8=0$　　B．$2x-3y+8=0$

C．$2x-3y-8=0$　　D．$3x+2y-8=0$

【剖析】设所求直线 l 的方程为 $2x-3y+m=0$，将点 $(-1,\ 2)$ 代入直线方程得：$m=8$

∴所求直线 l 的方程为 $2x-3y+8=0$，故选 B.

本题主要考查两直线平行的判定方法.

例 8-2 （2011 年单招试题）若圆心在 y 轴上，半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆 C 位于 x 轴上方，且与直线 $x-y=0$ 相切，则圆 C 的方程为（　　）

A．$x^2+(y+4)^2=8$　　B．$x^2+(y-4)^2=8$

C．$x^2+(y+2)^2=8$　　D．$x^2+(y-2)^2=8$

【剖析】设所求圆的标准方程为 $x^2+(y-b)^2=8\ (b>0)$

∵与直线 $x-y=0$ 相切

∴ $d=\dfrac{|b|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$　　∴ $b=\pm4$

∵ $b>0$

∴ $b=4$

∴ $x^2+(y-4)^2=8$，故选 B.

本题考查已知直线与圆相切，求圆的方程.

例 8-3 （2010 年单招试题）若圆 $x^2+y^2-2y-a=0$ 与圆 $(x+\sqrt{3})^2+y^2=1$ 相外切，则 $a=$_____.

【剖析】圆的标准方程为 $x^2+(y-1)^2=a+1$

∵两圆相外切

∴ $d=r_1+r_2$

即 $\sqrt{(0+\sqrt{3})^2+(1-0)^2}=\sqrt{a+1}+1$

∴ $a=0$

本题考查圆与圆相切问题.

例 8-4 （2008 年单招试题）过点 $(2,\ 3)$ 的直线 l 与圆 C：$x^2+y^2+4x+3=0$ 交于 A、B 两点，当弦长 $|AB|$ 取最大值时，直线 l 的方程为_____.

【剖析】圆的标准方程为 $(x+2)^2+y^2=1$，圆心 $(-2,\ 0)$

要使弦长 $|AB|$ 取最大值时，直线 l 就是直径所在的直线.

故直线 l 的方程是：$\dfrac{y-0}{3-0}=\dfrac{x-(-2)}{2-(-2)}$，即 $3x-4y+6=0$.

本题考查圆的弦长和直线方程等问题.

【巩固训练】

一、强化训练

1. 设直线 $ax+by+c=0$ 的倾斜角为 α，且 $\sin\alpha+\cos\alpha=0$，则 a，b 满足　　（　　）

A．$a+b=1$　　B．$a-b=1$　　C．$a+b=0$　　D．$a-b=0$

2. “$a=3$”是“直线 $ax+3y=0$ 平行于直线 $x+y=1$”的　　（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

3. 斜率为 2 且与圆 $x^2+y^2-2y-4=0$ 相切的直线方程是_____.

4. 直线 l：$x-ay+3=0$ 截圆 C：$x^2+y^2+2x-2y-7=0$ 得的弦长为 $2\sqrt{5}$，则 $a=$_____.

5. 已知圆 C：$x^2+y^2=r^2(r>0)$ 与直线 l：$x-y+4=0$.（1）试问 r 分别取何值时，圆 C 上恰有一点到 l 的距离等于 1；圆 C 上恰有两点到 l 的距离等于 1；圆 C 上恰有三点到 l 的距离等于 1；（2）圆 C 上最多有几个点到 l 的距离等于 1？

6. 已知圆 O：$x^2+y^2=4$，求过点 $P(2,\ 4)$ 与圆 O 相切的切线.

二、能力拓展

7. 已知圆 C 与 y 轴相切，圆心在直线 $x-3y=0$ 上，且被直线 $y=x$ 截得的弦长为 $4\sqrt{7}$，求圆的方程.

8. 某次生产中，一个圆形的零件损坏了，只剩下了如图 8-1 所示的一部分．现在黄军所在的车间准备重新做一个这样的零件，为了获得这个圆形零件的半径，黄军在零件上画了一条线段 AB，并作出了 AB 的垂直平分线 MN，而且测得 $AB=6\text{cm}$，$MN=1\text{cm}$．根据已有数据，试帮黄军求出这个零件的半径.

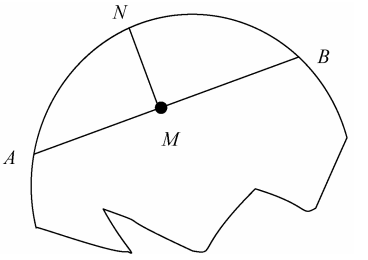


图 8-1

第 9 章　立体几何

9.1　平面的基本性质

【学习目标】

1．知识目标：了解平面的基本性质.
2．能力目标：会把文字语言用符号语言表示，能证明简单共面、共线问题.

【知识精要】

1. 平面的概念

平面是一个不加定义，只需理解的最基本的原始概念. 平面是没有厚薄，无限延展的.

2. 平面的表示

通常用平行四边形来表示，记作平面 α，平面 β……，也可用平行四边形对角的两个大写英文字母表示，记作_____或_____另外也可用多边形顶点的字母来表示，如平面_____，平面_____.

3. 点、线、面的基本位置关系

文字语言	符号表示	图形表示
点 A 在直线 a 上		
点 A 不在直线 a 上		
点 A 在平面 α 内		
点 A 不在平面 α 内		
直线 a，b 交于点 A		
直线 a 在平面 α 内		
直线 a 在平面 α 外		

4. 平面的基本性质

公理 1　文字语言表述_____.

符号语言表述_____.

用途_____.

公理 2　文字语言表述_____.

符号语言表述_____.

用途_____.

公理 3　文字语言表述_____.

符号语言表述_____.

用途_____.

三个推论：①_____.

②_____.

③_____.

用途_____.

【基础过关】

1．判断：

（1）一个平面长 4cm，宽 2cm；（　）

（2）两平面相交于一点；（　）

（3）一个平面的体积是 10 立方米；（　）

（4）如果两平面有三个公共点，那么两平面重合.（　）

2. 平面 α 与平面 β 相交于直线 l，可用符号表示为_____.

3. 经过空间任意三点作平面（　）

A．只有一个　　B．可作两个　　C．可作无数多个　　D．只有一个或有无数多个

【典型例题】

例 9-1-1　已知三条直线两两相交于不同的三点，证明这三条直线共面.

已知：$l\cap m=\{A\}$，$l\cap n=\{B\}$，$m\cap n=\{C\}$，求证：l、m、n 三线共面.

【要点解析】证明共面问题通常先根据条件找出一个平面，然后再证明其他的点、线也在这个平面上（纳入平面法）.

【证明】∵ $l\cap m=\{A\}$　∴ l 与 m 确定平面 α

又∵ $l\cap n=\{B\}$，$m\cap n=\{C\}$　∴ $B\in l$，$C\in m$　∴ $B\in\alpha$，$C\in\alpha$

又∵ $B\in n$，$C\in n$　∴ $n\subset\alpha$，故 l、m、n 三线共面.

例 9-1-2　如图 9-1-1 所示，在四面体 $ABCD$ 中作截面 PQR，若 PQ、CB 的延长线交于 M，RQ、DB 的延长线交于 N，RP、DC 的延长线交于 K. 求证：M、N、K 三点共线.

【要点解析】本题的证明是利用平面相交的公理来解决.

【证明】∵ $M \in PQ \subset$ 平面PQR，$M \in BC \subset$ 平面BCD

∴ M 是平面 PQR 与平面 BCD 的一个公共点

即 M 在平面 PQR 与平面 BCD 的交线上

同理可证 N、K 也在该交线上

∴ M、N、K 三点共线.

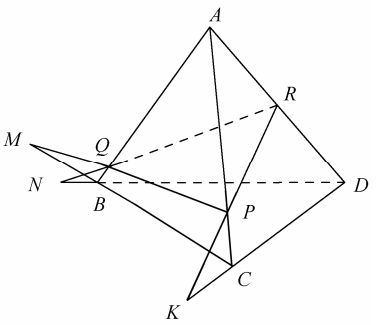


图 9-1-1

【巩固提高】

一、强化训练

1．下列说法正确的是（　）

A. 两平面相交只有一个公共点　　B. 两两相交的三条直线共面

C. 不共面的四点中，任何三点不共线　　D. 有三个公共点的两平面必重合

2. 在空间，下列命题中正确的是（　）

A. 对边相等的四边形一定是平面图形　　B. 有一组对边平行的四边形一定是平面图形

C. 四边相等的四边形一定是平面图形　　D. 有一组对角相等的四边形一定是平面图形

3. 下列说法正确的是（　）

A. 平行四边形是一个面　　B. 平面 α 的周长为 20cm

C. 平面 α 比平面 β 厚　　D. 点 A 在平面 α 内，记作 $A \in \alpha$

4. 不一定能确定一个平面的是（　）

A. 直线与直线外一点　　B. 两条相交直线　　C. 空间三点　　D. 两条平行直线

5. A、B、C 表示不同的点，a、l 表示不同的直线，α、β 表示不同的平面，下列推理不正确的是（　）

A. $A \in l$，$A \in \alpha$，$B \in l$，$B \in \alpha \Rightarrow l \subset \alpha$

B. $l \not\subset \alpha$，$A \in l \Rightarrow A \notin \alpha$

C. $A \in \alpha$，$A \in \beta$，$B \in \alpha$，$B \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = AB$ 直线

D. A，B，$C \in \alpha$，A、B、$C \in \beta$ 且 A、B、C 不共线 $\Rightarrow \alpha$ 与 β 重合

6. 一个平面可以将空间分为___个部分，两个平面可以将空间分为_____个部分，三个平面可以将空间分为_____个部分.

7. 三个平面 α、β、γ 两两相交，a、b、c 是三条交线.

（1）若 $a \cap b = P$，求证：a、b、c 三线共点；

（2）若 $a // b$，用反证法证明：直线 a、b、c 互相平行.

二、能力拓展

8. 已知 E 、 F 、 G 、 H 分别是空间四边形 $ABCD$ 各边 AB、AD、CB、CD 上的点，且直线 EF 和 GH 交于点 P，求证：点 B、D、P 在同一条直线上.

9.2 空间两条直线的位置关系

【学习目标】

1．知识目标：理解平行公理和等角定理；理解空间两条直线的位置关系.
2．能力目标：会用平行公理解决简单问题；会求简单的异面直线所成的角.

【知识精要】

1. 平行公理：平行于同一直线的两条直线互相平行.

2. 等角定理：如果一个角的两边和另一个角的两边分别_____且_____，则这两个角相等.

3. 空间两条直线的位置关系 $\begin{cases}\text{共面}\begin{cases}\text{相交（有一个公共点）}\\ \text{平行（无公共点）}\end{cases}\\ \text{异面（无公共点）}\end{cases}$

4. 异面直线是指不同在_____平面的两条直线.

判定：过平面外一点与平面内一点的直线和平面内不经过该点的直线是异面直线.

5. 直线 a、b 是异面直线，经过空间任意点 O，分别引直线 $a' \parallel a$，$b' \parallel b$，相交直线 a'、b' 所成的_____叫做异面直线 a、b 所成的角.

范围：_____.

【基础过关】

1. 两条异面直线是指 （ ）

A. 空间无公共点的两条直线　　B. 分别在两个不同平面的两条直线

C. 不同在任何一个平面内的两条直线　　D. 平面内一条直线和平面外的一条直线

2. 没有公共点的两条直线的位置关系是 （ ）

A. 异面　　B. 平行　　C. 平行或异面　　D. 不确定

3. 空间四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别 AB、BC、CD、DA 是的中点，问四边形 $EFGH$ 是怎样的四边形？

【典型例题】

例 9-2-1　如图 9-2-1 所示，空间四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点.

（1）求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形；

（2）若 $AC=BD$，则四边形 $EFGH$ 是怎样的四边形？

（3）若 $AC\perp BD$，则四边形 $EFGH$ 是怎样的四边形？

（4）若 $AC=BD$ 且 $AC\perp BD$，则四边形 $EFGH$ 是怎样的四边形？

【要点解析】本题主要是直线平行的传递性的应用.

【解】（1）证明：∵在△ABD 中，E、H 分别是 AB、AD 的中点

$\therefore EH\parallel BD,\ EH=\frac{1}{2}BD$

同理，$FG\parallel BD,\ FG=\frac{1}{2}BD$

$\therefore EH\parallel FG,\ EH=FG$

∴四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

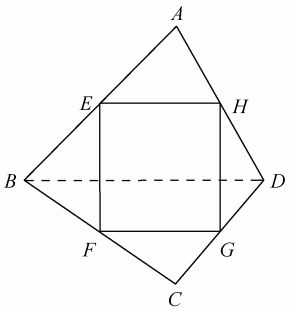


图 9-2-1

（2）由（1）知 $EF\parallel AC,\ EF=\frac{1}{2}AC$　∵ $AC=BD$

$\therefore EF=EH$

又四边形 $EFGH$ 是平行四边形　∴四边形 $EFGH$ 是菱形.

（3）∵ $AC\perp BD$　　$\therefore EF\perp EH$

由（2）知四边形 $EFGH$ 是矩形.

（4）由（2）（3）知四边形 $EFGH$ 是正方形.

例 9-2-2　在正四面体 $ABCD$ 中，已知 E 是棱 BC 的中点，请作出异面直线 AE 和 BD 所成的角.

【要点解析】求异面直线所成的角的关键是把两条异面直线平移转化成两条相交直线.

【解】取 CD 的中点 F，连接 EF、AF

∵ E 是 BC 的中点

∴ EF 是△CBD 的中位线　∴ $EF\ //\ CD$

∴ EF 与 AF 所成的角就是异面直线 AE 和 BD 所成角，故 $\angle AEF$ 即为所作.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 已知直线 a、b、c，若 $a\perp c$，$b\perp c$，则 a 与 b 的位置关系是　　（　　）

A. 平行　　B. 异面　　C. 平行或异面　　D. 平行、相交或异面

2. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 BD_1 与直线 AC 所成的角是（　）

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

3. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，与棱 AB 垂直的棱共有（　）

A. 6 条　　B．8 条　　C．5 条　　D．4 条

4. 过直线外一点可以作_____条直线和已知直线平行.

5. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=a$，$B_1B=BC=b$，则 CD_1 与 B_1B 所成角的余弦值是_____；BC_1 与 A_1C 所成的角的度数是_____.

6. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AB 与 B_1D_1 所成的角为_____.

7. 已知：在空间四边形 $ABCD$ 中，E、F 分别 AB、DA 的中点，G、H 分别是 BC、CD 上的点，且 $\frac{CG}{CB}=\frac{CH}{CD}=\frac{3}{4}$，求证：四边形 $EFGH$ 是梯形.

二、能力拓展

8. 在空间四边形 $ABCD$ 中，$AC=16$，$BD=12$，M、N 分别是 AB、CD 的中点，$MN=10$，求异面直线 AC 与 BD 所成的角.

【高考链接】

（1999 年单招试题）平面内一点 A 和平面外一点 B 的连线 AB 与平面内任意一条直线的位置关系是（　）

A．平行　　B．相交　　C．异面或平行　　D．相交或异面

9.3　直线与平面的位置关系（一）

【学习目标】

1．知识目标：理解直线与平面的三种位置关系.

2．能力目标：会判定直线与平面平行、垂直，并能掌握其性质.

【知识精要】

1. 直线与平面的位置关系

位置关系	公共点情况	记法
直线在平面内	直线上所有的点都在平面内	
直线与平面平行	无公共点	
直线与平面相交	有且只有一个公共点	

2. 直线与平面平行

（1）定义：_____.

（2）判断定理：_____.

（3）性质定理：_____.

3. 直线与平面垂直

（1）定义：_____.

（2）判断定理：①_____.

②_____.

（3）性质定理：①_____.

②_____.

【基础过关】

1. 已知直线 $l \parallel \alpha$，直线 $a \subset \alpha$，则 l 与 a 的位置关系是　　（　　）

A. 平行　　B. 异面　　C. 相交　　D. 无公共点

2. 若一条直线垂直于平面内的（　　）直线，则这条直线与这个平面垂直.

A. 一条　　B. 两条　　C. 任意一条　　D. 无数条

3. 如图 9-3-1 所示，已知 E、F、G、H 为空间四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 上的点，且 $EH \parallel FG$. 求证：$EH \parallel BD$.

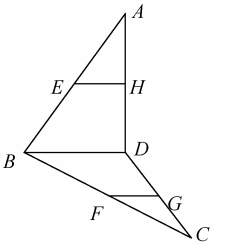


图 9-3-1

【典型例题】

例 9-3-1　如图 9-3-2 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O 是底面 $ABCD$ 对角线的交点. 求证：（1）C_1O // 平面 AB_1D_1；（2）$A_1C \perp$ 平面 AB_1D_1.

【要点解析】本题主要考查线面平行、垂直的判定方法.

【证明】（1）连接 A_1C_1，设 $A_1C_1 \cap B_1D_1 = \{O_1\}$ 连接 AO_1，

$\because$ $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正方体

$\therefore$ A_1ACC_1 是平行四边形

$A_1C_1 \parallel AC$ 且 $A_1C_1 = AC$

又 O_1、O 分别是 A_1C_1、AC 的中点，$O_1C_1 \parallel AO$

且 $O_1C_1 = AO$

$\therefore$ AOC_1O_1 是平行四边形

$C_1O \parallel AO_1$，$AO_1 \subset$ 平面 AB_1D_1，$C_1O \not\subset$ 平面 AB_1D_1

$\therefore$ $C_1O \parallel$ 平面 AB_1D_1

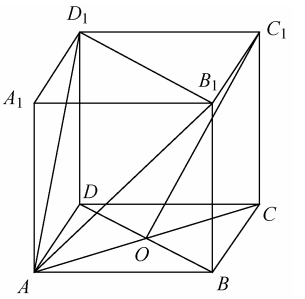


图 9-3-2

（2）$\because$ $CC_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ $\therefore$ $CC_1 \perp B_1D_1$

又 $\because$ $A_1C_1 \perp B_1D_1$ $\therefore$ $B_1D_1 \perp$ 平面 A_1C_1C，即 $A_1C \perp B_1D_1$

同理可证 $A_1C \perp AB_1$，又 $D_1B_1 \cap AB_1 = \{B_1\}$

$\therefore$ $A_1C \perp$ 平面 AB_1D_1

例 9-3-2 如图 9-3-3 所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，侧棱 $PD \perp$ 底面 $ABCD$，$PD = DC$，E 是 PC 的中点，作 $EF \perp PB$ 交 PB 于点 F.

（1）证明 PA //平面 EDB；（2）证明 $PB \perp$ 平面 EFD.

【要点解析】本题考查直线与平面平行，直线与平面垂直的基础知识，考查空间想象能力和推理论证能力.

【证明】（1）连接 AC，AC 交 BD 于 O，连接 EO.

$\because$ 底面 $ABCD$ 是正方形 $\therefore$ 点 O 是 AC 的中点

在 $\triangle PAC$ 中，EO 是中位线 $\therefore$ $PA \parallel EO$

而 $EO \subset$ 平面 EDB 且 $PA \not\subset$ 平面 EDB，

所以，PA //平面 EDB.

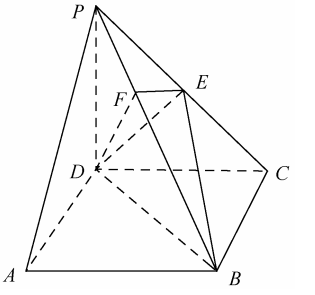


图 9-3-3

（2）$\because$ $PD \perp$ 底面 $ABCD$ 且 $DC \subset$ 底面 $ABCD$，

$\therefore$ $PD \perp DC$

$\because$ $PD = DC$，可知 $\triangle PDC$ 是等腰直角三角形，而 DE 是斜边 PC 的中线，

$\therefore$ $DE \perp PC$ ①

同样由 $PD \perp$ 底面 $ABCD$，得 $PD \perp BC$.

$\because$ 底面 $ABCD$ 是正方形，有 $DC \perp BC$，又 $PD \cap DC = \{D\}$ $\therefore$ $BC \perp$ 平面 PDC

而 $DE \subset$ 平面 PDC，$\therefore$ $BC \perp DE$ ②

由①和②且 $BC \cap PC = \{C\}$ 推得 $DE \perp$ 平面 PBC. 而 $PB \subset$ 平面 PBC

$\therefore$ $DE \perp PB$

又 $EF \perp PB$ 且 $DE \cap EF =$ { E }，所以 $PB \perp$ 平面 EFD.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 直线 a 与平面 α 内的两条直线都垂直，则 a 与 α 的位置关系是 （ ）

A. 垂直　　B. 平行　　C. 斜交　　D. 上述都有可能

2. 若直线 l 是平面 α 的斜线，那么在平面 α 内　　（　　）

A. 不存在与 l 平行的直线　　B. 不存在与 l 垂直的直线

C. 与 l 垂直的直线只有一条　　D. 与 l 平行的直线有无数条

3. 如果直线 $a \perp b$，且 $a \perp$ 平面 α，则　　（　　）

A. b //平面 α　　B. $b \subset \alpha$　　C. $b \perp$ 平面 α　　D. b //平面 α 或 $b \subset \alpha$

4. 若直线 $a \perp b$，则 a 与 b 不可能　　（　　）

A. 相交　　B. 异面　　C. 平行　　D. 垂直

5. “直线 l 垂直于平面 α 内的无数条直线”是“$l \perp \alpha$”的_____条件.

6. 如图 9-3-4 所示，P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外一点，$AP = AC$，$BP = BC$，D 为 PC 的中点. 证明：直线 $PC \perp$ 平面 ABD.

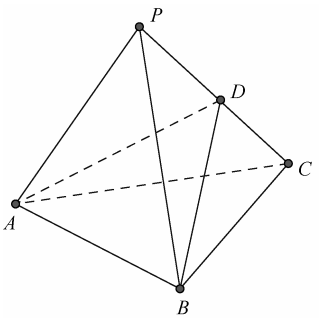


图 9-3-4

二、能力拓展

7. 如图 9-3-5 所示，$PA \perp$ 矩形 $ABCD$ 所在的平面，M、N 分别是 AB、PC 的中点.

（1）求证：MN // 平面 PAD；（2）求证：$MN \perp CD$；

（3）若 $\angle PDA = 45°$，求证：$MN \perp$ 平面 PCD.

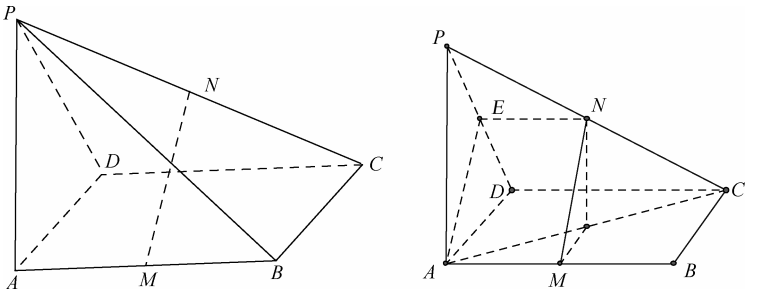


图 9-3-5

【高考链接】

（2010 年单招试题）如图 9-3-6 所示，在三棱锥 $S-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 为正三角形，S 在平面 ABC 内的射影 O 在 $\angle ACB$ 的平分线 CD 上. 求证：$AB \perp SC$.

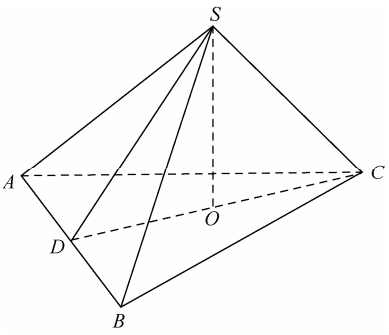


图 9-3-6

9.4 直线与平面的位置关系（二）

【学习目标】

1. 知识目标：理解三垂线定理及其逆定理和直线与平面所成的角.
2. 能力目标：能用三垂线定理及其逆定理解决简单问题，会求直线与平面所成的角.

【知识精要】

1. 三垂线定理及其逆定理

定　理：_____.

逆定理：_____.

2. 直线与平面所成角

（1）直线和平面平行或在平面内_____.

（2）直线和平面垂直_____.

（3）直线与平面斜交_____.

（4）直线与平面所成的角的范围：_____.

3. 最小角定理

平面的斜线与平面所成的角是斜线和平面内经过斜足的直线所成的一切角中最小的角.

【基础过关】

1. 判断题（对的打“√”，错的打“×”）：

（1）过已知直线外一点，有且只有一条直线与已知直线平行.　（　）

（2）过已知平面外一点，有且只有一条直线与已知平面平行.　（　）

（3）过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.　（　）

（4）过一点有且只有一条直线与已知平面垂直.　（　）

（5）过一点有且只有一个平面与已知直线垂直.　（　）

（6）过已知直线外一点，有且只有一个平面与已知直线平行.　（　）

2. 对于平面 α 和共面的直线 m、n，下列命题中假命题是_____（填序号）.

① 若 $m\perp\alpha$，$m\perp n$，则 $n\parallel\alpha$　② 若 $m\parallel\alpha$，$n\parallel\alpha$，则 $m\parallel n$

③ 若 $m\subset\alpha$，$n\parallel\alpha$，则 $m\parallel n$　④ 若 m、n 与 α 所成的角相等，则 $m\parallel n$

3. 已知 BC 是 Rt$\triangle ABC$ 的斜边，$AP\perp$ 平面 ABC，连接 PB、PC，作 $PD\perp BC$ 于 D，连接 AD，则图中共有直角三角形_____个.

【典型例题】

例 9-4-1　如图 9-4-1 所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$SA\perp$ 平面 ABC，$AD\perp SC$，求证：$AD\perp$ 平面 SBC.

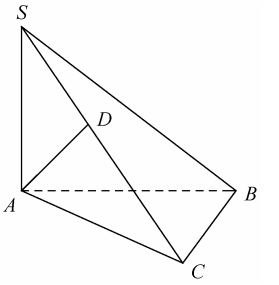


图 9-4-1

【要点解析】本题主要考查线面垂直的判定与性质.

【证明】∵ $\angle ACB=90^\circ$　∴ $BC\perp AC$

又 $SA\perp$ 平面 ABC　∴ $SA\perp BC$

又 $AC\cap SA=\{A\}$　∴ $BC\perp$ 平面 SAC　∴ $BC\perp AD$

又 $SC\perp AD$，$SC\cap BC=\{C\}$

∴ $AD\perp$ 平面 SBC.

例 9-4-2　如图 9-4-2 所示，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=BC=1$，$\angle ACB=90^\circ$，$AA_1=\sqrt{2}$，D 是 A_1B_1 中点.

求证：（1）$C_1D\perp$ 平面 AA_1B_1B；（2）当点 F 在 BB_1 上什么位置时，会使得 $AB_1\perp$ 平面 C_1DF？并证明你的结论.

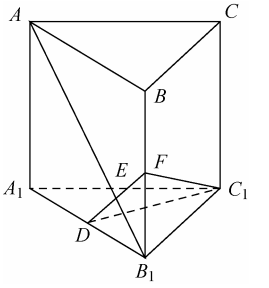


图 9-4-2

【要点解析】（1）由于 C_1D 所在平面 $A_1B_1C_1$ 垂直于平面 A_1B，只要证明 C_1D 垂直交线 A_1B_1，由直线与平面垂直判定定理可得 $C_1D\perp$ 平面 A_1B；（2）由（1）得 $C_1D\perp AB_1$，只要过 D 作 AB_1 的垂线，它与 BB_1 的交点即为所求的 F 点位置.

（1）**【证明】**如图 9-4-2 所示，∵ $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，

∴ $A_1C_1=B_1C_1=1$，且 $\angle A_1C_1B_1=90^\circ$

又 D 是 A_1B_1 的中点　∴ $C_1D\perp A_1B_1$

∵ $AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，$C_1D\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$

∴ $AA_1\perp C_1D$，又 $A_1B_1\cap AA_1=\{A_1\}$　∴ $C_1D\perp$ 平面 AA_1B_1B.

（2）【解】作 $DE\perp AB_1$ 交 AB_1 于 E，延长 DE 交 BB_1 于 F，连接 C_1F，则 $AB_1\perp$ 平面 C_1DF，点 F 即为所求

$\because$ $C_1D\perp$ 平面 AA_1B_1B，$AB_1\subset$ 平面 AA_1B_1B

$\therefore$ $C_1D\perp AB_1$　　又 $AB_1\perp DF$，$DF\cap C_1D=\{D\}$

$\therefore$ $AB_1\perp$ 平面 C_1DF.

例 9-4-3　如图 9-4-3 所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面为直角梯形，$AD\ //\ BC$，$\angle BAD=90^\circ$，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PA=AD=AB=2BC$，M、N 分别为 PC、PB 的中点.

（1）求证：$PB\perp DM$；

（2）求 CD 与平面 $ADMN$ 所成角的正弦值.

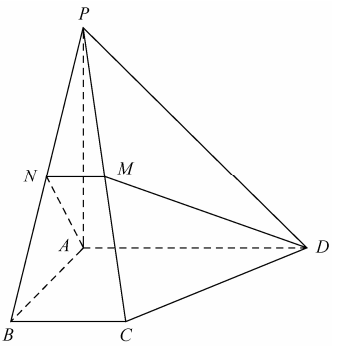


图 9-4-3

（1）【证明】因为 N 是 PB 的中点，$PA=PB$，所以 $AN\perp PB$.

因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$　$\therefore$ $AD\perp PA$

$\because$ $\angle BAD=90^\circ$　$\therefore$ $AD\perp AB$ 且 $PA\cap AB=\{A\}$

$\therefore$ $AD\perp$ 平面 PAB，所以 $AD\perp PB$，

$AD\cap AN=\{A\}$

从而 $PB\perp$ 平面 $ADMN$.

因为 $DM\subset$ 平面 $ADMN$，所以 $PB\perp DM$.

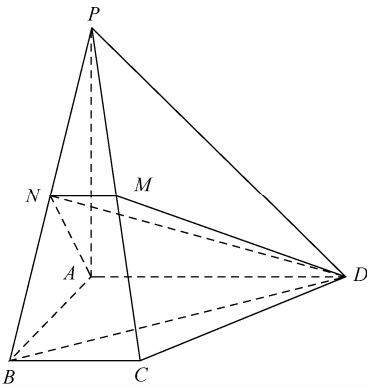


图 9-4-4

（2）【解】取 AD 的中点 G，连接 BG、NG，则

$BG//CD$，所以 BG 与平面 $ADMN$ 所成的角和 CD 与平面 $ADMN$ 所成的角相等.

因为 $PB\perp$ 平面 $ADMN$，

所以 $\angle BGN$ 是 BG 与平面 $ADMN$ 所成的角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BGN$ 中，$\sin\angle BNG=\dfrac{BN}{BG}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

故 CD 与平面 $ADMN$ 所成角的正弦值是 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 在正方体中，与正方体的一条对角线垂直的面对角线的条数是_____.

2. 正三棱锥的侧面都是直角三角形，则侧棱与底面所成角的正弦值是_____.

3. 正四面体的侧棱与底面所成角的余弦值是（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. 若两条直线与一平面所成的角相等，则这两条直线的位置关系是（　　）

A. 平行　　B. 相交　　C. 异面　　D. 以上均有可能

5. 在正方体 AC_1 中，O 是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心，则直线 CO 垂直于（　　）

A. A_1D_1　　B. A_1A　　C. AC　　D. BD

6. 如图 9-4-5 所示，平面 $\alpha \cap \beta = CD$，$EA \perp \alpha$，$EB \perp \beta$，且 $A \in \alpha$，$B \in \beta$.

求证：（1）$CD \perp$ 平面 EAB；（2）$CD \perp AB$.

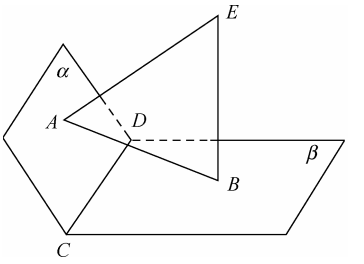


图 9-4-5

二、能力拓展

7. 如图 9-4-6 所示，已知 $ABCD$ 是矩形，$PA \perp$ 平面 $ABCD$，$AB = 2$，$PA = AD = 4$，E 为 BC 的中点.（1）求证：$DE \perp$ 平面 PAE；（2）求直线 DP 与平面 PAE 所成的角.

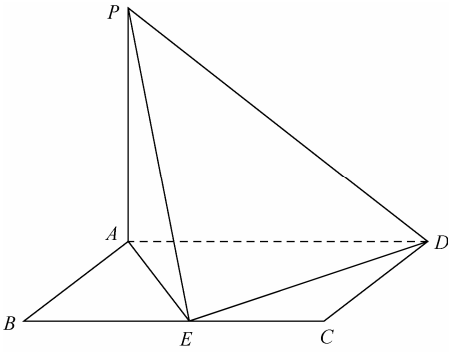


图 9-4-6

【高考链接】

（2009 年单招试题）如图 9-4-7 所示，在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，侧棱和底面边长都是 2，D 是 AC 的中点.

（1）求证：$BD \perp A_1D$；

（2）求直线 BA_1 与平面 A_1ACC_1 所成角的大小.

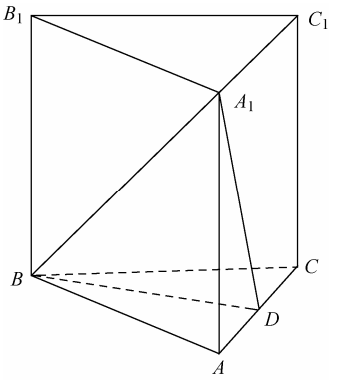


图 9-4-7

9.5 平面与平面的位置关系（一）

【学习目标】

1. 知识目标：理解平面与平面的位置关系，理解平面与平面平行的判定与性质定理.
2. 能力目标：能用平面与平面平行的判定与性质定理解决相关问题.

【知识精要】

1. 平面与平面的位置关系

位置关系	公共部分情况	记法
相交	有且仅有一条公共直线	
平行	无公共点	

2. 平面与平面平行的定义

_____.

3. 平面与平面平行的判定

（1）判定定理：_____.

（2）推论：_____.

（3）垂直于同一直线的两个平面_____.

4. 平面与平面平行的性质

（1）性质定理：_____.

（2）两个平面平行，其中一个平面内的所有直线都_____另一平面.

（3）一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面，也_____另一个平面.

（4）夹在两个平行平面间的平行线段_____.

【基础过关】

1. 下列条件中，不能判断两个平面平行的是_____（填序号）.

① 一个平面内的一条直线平行于另一个平面

② 一个平面内的两条直线平行于另一个平面

③ 一个平面内有无数条直线平行于另一个平面

④ 一个平面内任何一条直线都平行于另一个平面

2. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 AB_1D_1 和平面 BC_1D 的位置关系为_____.

3. 写出平面 α // 平面 β 的一个充分条件_____（写出一个你认为正确的即可）.

【典型例题】

例 9-5-1　如图 9-5-1 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中.（1）求证：平面 A_1BD // 平面 B_1D_1C；（2）若 E、F 分别是 AA_1、CC_1 的中点，求证：平面 EB_1D_1 // 平面 FBD.

【要点解析】本题主要考查面面平行判定的方法.

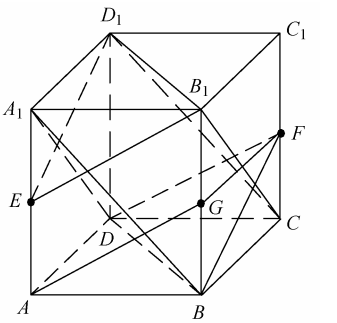


图 9-5-1

【证明】（1）由 B_1B // DD_1，得四边形 BB_1D_1D 是平行四边形　$\therefore B_1D_1$ // BD

又 $BD \not\subset$ 平面 B_1D_1C，$B_1D_1 \subset$ 平面 B_1D_1C，

$\therefore BD$ // 平面 B_1D_1C.

同理 A_1D // 平面 B_1D_1C.

而 $A_1D \cap BD = \{D\}$

$\therefore$ 平面 A_1BD // 平面 B_1CD.

（2）由 BD // B_1D_1，得 BD // 平面 EB_1D_1. 取 BB_1 中点 G　$\therefore AE$ // B_1G.

又因为 $AE=B_1G$，从而得 B_1E // AG，同理 GF // AD. $\therefore AG$ // DF　$\therefore B_1E$ // DF.

$\therefore DF$ // 平面 EB_1D_1. 而 $DF \cap BD = \{D\}$

$\therefore$ 平面 EB_1D_1 // 平面 FBD.

例 9-5-2　如图 9-5-2 所示，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 是 BC 上一点，且 A_1B // 平面 AC_1D，D_1 是 B_1C_1 的中点，求证：平面 A_1BD_1 // 平面 AC_1D.

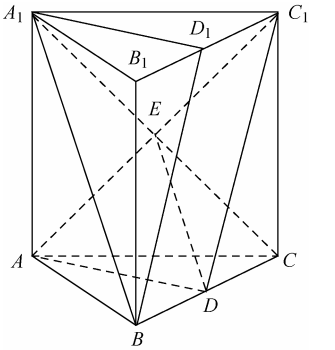


图 9-5-2

【证明】连接 A_1C 交 AC_1 于点 E

∵四边形 A_1ACC_1 是平行四边形

$\therefore E$ 是 A_1C 的中点，连接 ED

∵ A_1B // 平面 AC_1D，平面 $A_1BC \cap$ 平面 $AC_1D = ED$

$\therefore A_1B \parallel ED$.

$\because E$ 是 A_1C 的中点　$\therefore D$ 是 BC 的中点.

又 $\because D_1$ 是 B_1C_1 的中点

$\therefore$ 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BD_1 \parallel C_1D$，$A_1D_1 \parallel AD$

又 $A_1D_1 \cap BD_1 = \{D_1\}$　$\therefore$ 平面 $A_1BD_1 \parallel$ 平面 AC_1D.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 已知平面 $\alpha \parallel \beta$，$a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，则直线 a、b 是　（　　）

A. 平行直线　　B. 异面直线　　C. 相交直线　　D. 不是相交直线

2. 过平面外两点可以作（　　）个已知平面的平行平面.

A. 0　　B. 1　　C. 0 或 1　　D. 0 或 1 或 2

3. AB、CD 是夹在两个平行平面之间的两条线段，那么这两条线段所在直线的位置关系是（　　）

A. 平行　　B. 相交　　C. 异面　　D. 以上都有可能

4. 下列条件能判定两个平面 α、β 平行的是　（　　）

A. $a \parallel \alpha$，$b \parallel \alpha$，$a \parallel \beta$，$b \parallel \beta$，a、b 是异面直线

B. 平面 α 内有无数条直线都与平面 β 平行

C. 平面 α 和平面 β 内各有一个三角形，这两个三角形全等

D. 一条直线和平面 α、平面 β 斜交，所成的角相等

5. 已知平面 $\alpha \parallel \beta$，$a \subset \alpha$，给出下列命题：

（1）直线 a 与平面 β 内的所有直线都平行；

（2）直线 a 与平面 β 内的无数条直线都平行；

（3）直线 a 与平面 β 内的任何一条直线都不垂直；

（4）直线 a 与平面 β 间的距离等于平面 α 和平面 β 间距离.

正确命题的个数为　（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. 已知两个平行平面间的距离为 10，与两个平面成 30° 的直线和两平面分别交于 A、B 两点，则 $AB =$_____.

二、能力拓展

7. 如图 9-5-3 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F、G 分别是 AB、AD、C_1D_1 的中点. 求证：平面 $D_1EF \parallel$ 平面 BDG.

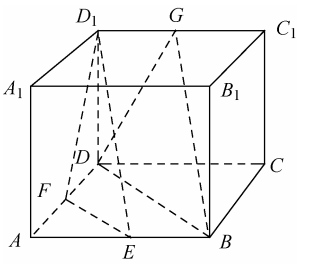


图 9-5-3

【高考链接】

（2011 年单招试题）对于直线 m 和平面 α，β，若 $m \subset \alpha$，则“$\alpha // \beta$”是“$m // \beta$”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9.6　平面与平面的位置关系（二）

【学习目标】

1．知识目标：理解二面角的概念；理解平面与平面垂直的判定与性质定理.

2．能力目标：会求二面角，能用平面与平面垂直的判定与性质定理解决相关问题.

【知识精要】

1. 平面与平面垂直的定义：_____.

2. 平面与平面垂直的判定定理：_____.

3. 平面与平面垂直的性质定理：

（1）如果两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直于它们的交线的直线_____另一个平面；

（2）如果两个平面互相垂直，那么过一个平面内一点垂直于另一个平面的直线在____________________.

4. 二面角的概念：_____.记为_____.

5. 二面角的平面角：_____.

6. 直二面角：_____.

7. 二面角的范围：_____.

8. 二面角的平面角的求法：

定义法		
垂面法		
三垂线法		
公式法		

【基础过关】

1．下列命题中，正确的是 （ ）

A．如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直

B．如果一个平面内两条直线都平行于另一平面，那么这两个平面平行

C．如果两条直线都平行于同一平面，那么这两条直线平行

D．如果一条直线上有两个点到一个平面的距离相等，那么这条直线和这个平面平行

2．已知 PA 垂直于正方形 $ABCD$ 所在的平面于 A 点，连 PB 、 PC 、 PD 、 AC 、 BD，则互相垂直的平面有 （ ）

A．5 对　　B．6 对　　C．7 对　　D．8 对

3. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，二面角 $D_1-A_1C-B_1$ 的度数是 （ ）

A．45°　　B．60°　　C．120°　　D．135°

【典型例题】

例 9-6-1 如图 9-6-1 所示，已知 E 、 F 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AA_1 和棱 CC_1 的中点.

（1）试判断四边形 $EBFD_1$ 的形状；

（2）求证：平面 $EBFD_1\perp$ 平面 BB_1D_1.

【要点解析】本题主要考查平行四边形的判定以及面面垂直的判定方法.

【解】（1）如图，取 BB_1 的中点 M ，连接 A_1M 、 MF .

$\because M$ 、 F 分别是 BB_1 和 CC_1 的中点，

$\therefore MF\parallel\!\!=B_1C_1$ ，

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，有 $A_1D_1\parallel\!\!=B_1C_1$ ，

$\therefore MF\parallel\!\!=A_1D_1$ ，

$\therefore$ 四边形 A_1MFD_1 是平行四边形，$\therefore A_1M\parallel\!\!=D_1F$.

又 E 、 M 分别是 AA_1 、 BB_1 的中点，$\therefore A_1E\parallel\!\!=BM$ ，

$\therefore$ 四边形 A_1EBM 为平行四边形，

$\therefore EB\parallel\!\!=A_1M$. 故 $EB\parallel\!\!=D_1F$. $\therefore$ 四边形 $EBFD_1$ 是平行四边形.

又 $\mathrm{Rt}\triangle EAB\cong\mathrm{Rt}\triangle FCB$ $\therefore BE=BF$ ，故四边形 $EBFD_1$ 为菱形.

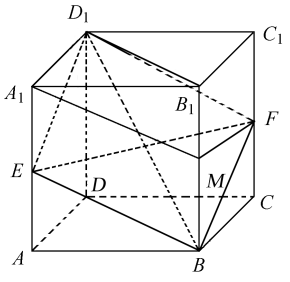


图 9-6-1

（2）连接 EF 、 BD_1 、 A_1C_1 . 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，有 $B_1D_1\perp A_1C_1$ ，

$B_1B \perp A_1C_1$，$B_1B \cap B_1D_1 = \{B_1\}$　$\therefore A_1C_1 \perp$ 平面BB_1D_1，

$\because EF // A_1C_1$　$\therefore EF \perp$ 平面 BB_1D_1.

又 $EF \subset$ 平面 $EBFD_1$，故平面 $EBFD_1 \perp$ 平面 BB_1D_1

例 9-6-2　如图 9-6-2 所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是 $\angle DAB = 60^\circ$ 且边长为 a 的菱形，侧面 PAD 是等边三角形，且侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$.

（1）若 G 为 AD 的中点，求证：$BG \perp$ 平面 PAD；

（2）求证：$AD \perp PB$；

（3）求二面角 $A-BC-P$ 的大小.

【要点解析】本题主要考查线面、面面垂直的判定与性质和二面角的求法.

【证明】（1）$\triangle ABD$ 为等边三角形且 G 为 AD 的中点，

$\therefore BG \perp AD$

又平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$

$\therefore BG \perp$ 平面 PAD.

（2）PAD 是等边三角形且 G 为 AD 的中点，

$\therefore AD \perp PG$

且 $AD \perp BG$，$PG \cap BG = \{G\}$

$\therefore AD \perp$ 平面 PBG

$PB \subset$ 平面 PBG，$\therefore AD \perp PB$.

（3）由 $AD \perp PB$，$AD // BC$，$\therefore BC \perp PB$

又 $BG \perp AD$，$AD // BC$，$\therefore BG \perp BC$

$\therefore \angle PBG$ 为二面角 $A-BC-P$ 的平面角

在 Rt$\triangle PBG$ 中，$PG = BG$，$\therefore \angle PBG = 45^\circ$.

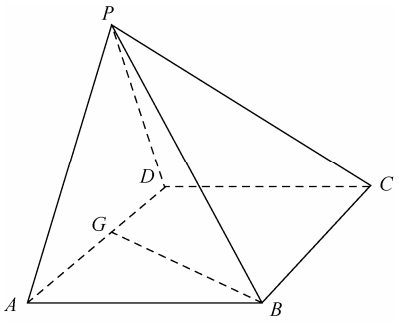


图 9-6-2

【巩固提高】

一、强化训练

1. 若平面 $\alpha \perp$ 平面 β，又直线 $m \subset \alpha$，直线 $l \subset \beta$，且 $m \perp l$，则　（　）

A．$m \perp \beta$　　B．$l \perp \alpha$　　C．$m \perp \beta$ 且 $l \perp \alpha$　　D．$m \perp \beta$ 或 $l \perp \alpha$

2. 在空间四边形 $ABCD$ 中，$AB = AD = 1$，$CB = CD = \sqrt{2}$，$AC = \sqrt{3}$，$\angle BCD = 60^\circ$，那么二面角 $B-AC-D$ 的大小是　（　）

A．60°　　B．90°　　C．120°　　D．150°

3. 正方形 $ABCD$ 所在平面外一点 P，有 $PA = PB = PC = PD = AB$，则二面角 $P-AB-C$ 的余弦值是　（　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. 下列说法错误的是　（　）

A. 二面角的棱必垂直于这个二面角的平面角所在平面

B. 二面角的平面角的大小与它的顶点在二面角的棱上的位置无关

C. 以二面角的棱上一点为端点在两个面内分别引射线，则两条射线所成的角中，最小的角与二面角的平面角相等

D. 二面角的大小，可用它的平面角来度量

5. P 是平面 ABC 外一点，如果 $PA=PB=PC$，$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=60^\circ$，则二面角 $P-AB-C$ 的余弦值为_____.

6. 如图 9-6-3 所示，$EA\perp\alpha$，$EB\perp\beta$，$\angle BEA=120^\circ$，则二面角 $\alpha-CD-\beta$ 的大小是_____.

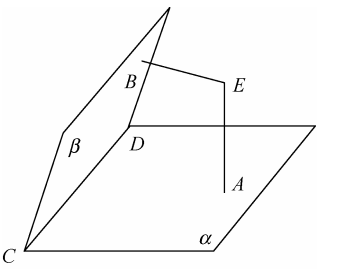


图 9-6-3

7. 如图 9-6-4 所示，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，E、F 分别是 A_1B、A_1C 的中点，点 D 在 B_1C_1 上，$A_1D\perp B_1C$.

求证：(1) EF // 平面 ABC；(2) 平面 $A_1FD\perp$ 平面 BB_1C_1C.

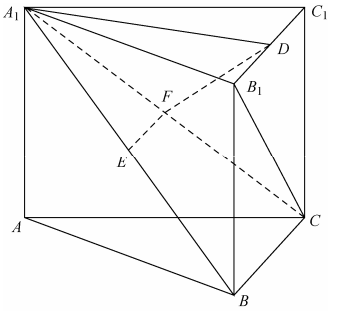


图 9-6-4

二、能力拓展

8. 如图 9-6-5 所示，过 S 引三条长度相等但不共面的线段 SA、SB、SC，且 $\angle ASB=\angle ASC=60^\circ$，$\angle BSC=90^\circ$，求证：平面 $ABC\perp$ 平面 BSC.

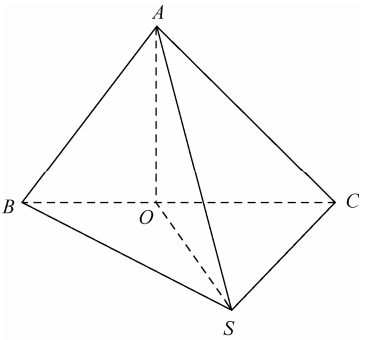


图 9-6-5

【高考链接】

（2000 年单招试题）如图 9-6-6 所示，已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面边长为 a，侧棱长为 $2a$. 求：（1）点 A 到直线 B_1C 的距离；（2）二面角 $A-B_1C-B$ 的正切值.

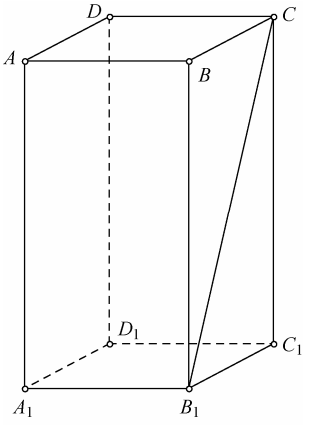


图 9-6-6

9.7　柱、锥、球及其组合体（一）

【学习目标】

1．知识目标：了解棱柱、棱锥的概念及基本特征.

2．能力目标：会求棱柱、棱锥的侧面积、表面积、体积.

【知识精要】

名称	棱　柱		棱　锥
图形			
主要特征	①侧棱_____且_____ ②侧面都是_____四边形 ③两侧面_____且是_____的多边形		①侧棱相交于_____ ②各侧面都是_____
特殊图形主要特征	直 棱 柱	正 棱 柱	正 棱 锥
	①侧棱都是棱柱的高 ②侧面是_____	①侧棱都是棱柱的高 ②各侧面是_____的矩形 ③两底面是_____多边形，两底面中心的连线_____于底面	①侧棱相等 ②各侧面是___三角形 ③顶点与底面中心的连线____于底面

续表

名称	棱　柱	棱　锥
侧面积		
全面积	$S_{全}=S_{侧}+2S_{底}$	$S_{全}=S_{侧}+S_{底}$
体积		

【基础过关】

1．判断：

（1）直四棱柱是长方体；（　　）

（2）底面是正三角形的棱锥是正三棱锥；（　　）

（3）正棱锥的侧面是正三角形；（　　）

（4）{棱柱}⊃{直棱柱}⊃{正棱柱}⊃{长方体}⊃{正方体}；（　　）

（5）侧棱和底面成等角的棱锥是正棱锥.（　　）

2．正方体的一条对角线长为 a，则它的全面积为（　　）

A．a^2　　B．$2a^2$　　C．$3a^2$　　D．$4a^2$

3．已知正四棱锥的底面边长为 4，侧面积为 32，求这个正四棱锥的体积.

【典型例题】

例 9-7-1　已知直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面 ABC 是等腰直角三角形．$AB=BC$，$\angle ABC=90^\circ$，三角形的面积是 72cm^2，侧棱长为 16cm，求棱柱的侧面积.

【要点解析】直棱柱的侧面均为矩形，因此求棱柱的侧面积即为求侧面三个矩形的面积和.

【解】在△ABC 中

$AB=BC$，$\angle ABC=90^\circ$，$S_{\triangle ABC}=72\text{cm}^2$

$\therefore \frac{1}{2}AB\cdot BC=72$

即 $AB^2=144$

$\therefore AB=12$

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=12\sqrt{2}$

$\therefore S=16(12+12+12\sqrt{2})=192(2+\sqrt{2})\ \text{cm}^2$

例9-7-2　长方体的全面积为 11，所有的棱的长度之和为 24，求这个长方体的体对角线长.

【要点解析】由于长方体体对角线的长等于从一个顶点出发的三条棱的平方和的算数平方根，因此可以设出从一个顶点出发的三条棱的长度，利用已知条件列方程组求解.

【解】设长方体的长、宽、高分别为 x，y，z，体对角线长为 l，则由题意知：

$$\begin{cases} 2(xy+yz+zx)=11 & ① \\ 4(x+y+z)=24 & ② \end{cases}$$

由②得，$x+y+z=6$.

$\therefore x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=6^2-11=25$

$\therefore$ 长方体体对角线长为5.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 一个正三棱锥的底面边长为 6，侧棱长为 $\sqrt{15}$，这个三棱锥的体积是　　（　　）

A．9　　B. $\frac{9}{2}$　　C. $\frac{27}{2}$　　D. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

2. 若正棱锥的高与底面边长都扩大到原来的 2 倍，则体积扩大到原来的　　（　　）

A．4 倍　　B．$2\sqrt{2}$ 倍　　C．8 倍　　D．$4\sqrt{2}$ 倍

3. 已知正四棱锥的底面边长为 a，高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$，则此棱锥的侧面积等于　　（　　）

A．$\sqrt{2}a^2$　　B．$2a^2$　　C．$3a^2$　　D．$4a^2$

4. 棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，从点 A 出发沿表面运动到 C_1 的最短路线　　（　　）

A．$\sqrt{3}a$　　B．$\sqrt{5}a$　　C．$3a$　　D．$\left(1+\sqrt{2}\right)a$

5. 由一个顶点出发的长方体的三条棱长的和为15cm，全面积是125cm^2，则长方体的对角线的长是_____.

6. 正四棱锥的底面边长是 a，侧棱与底面所成的角是 α，棱锥的高是_____.

7. 已知正方体 $ACBD-A'B'C'D'$，则该正方体的体积、四棱锥 $C'-ACBD$ 的体积以及该正方体的外接球的体积之比为_____.

二、能力拓展

8. 正方体的八个顶点中有四个可组成正四面体的顶点，正方体的表面积与这个正四面体的表面的比是　　（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{\sqrt{11}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{11}}{3}$

9. 如图 9-7-1 所示，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，底面边长是 4，二面角 $A-B_1C_1-A_1$ 为 60°，求这个正三棱柱的体积.

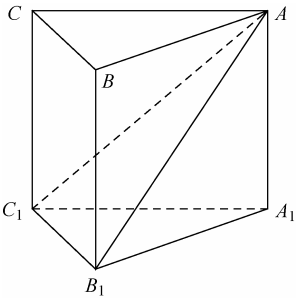


图 9-7-1

【高考链接】

（2007 年单招试题）如图 9-7-2 所示，在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是 AD 的中点. 求三棱锥 $B-AED_1$ 的体积.

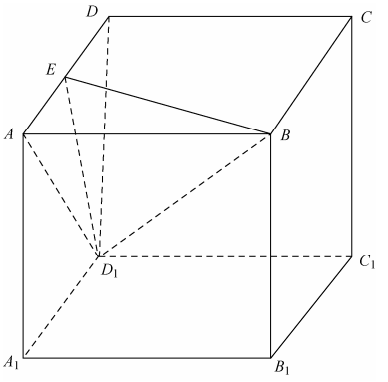


图 9-7-2

9.8　柱、锥、球及其组合体（二）

【学习目标】

1．知识目标：了解圆柱、圆锥、球的生成规律.
2．能力目标：会求圆柱、圆锥、球的面积与体积.

【知识精要】

旋转体

名称	圆柱	圆锥	球
图形			
主要特征	①两个底面是等圆，且互相平行； ②母线长相等，都等于圆柱的高； ③轴过两个底面的圆心并与底面垂直，轴长等于高	①底面及平行于底面的截面都是圆； ②母线都经过顶点且相等； ③母线与底面所成的角相等； ④轴经过底面的中心，并垂直于底面，轴长等于高	①球的截面是圆，圆心是球心的圆叫大圆； ②球切面垂直于过切点的半径； ③球切线垂直于过切点的半径
侧面积			
全面积			
体积	$V=\pi r^2 h$	$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$V=\frac{4}{3}\pi r^2$
备注	r：底面圆半径 h：高	r：底面圆半径 h：高 l：母线长	r：球半径

【基础过关】

1. 已知圆柱的轴截面是一个面积为 4 的正方形，则圆柱的侧面积是（　　）

A．2π　　B．4π　　C．6π　　D．8π

2. 已知圆锥的底面半径为 3，高为 4，则圆锥的侧面积为_____，体积为_____.

3. 已知两球的表面积之比为 4∶1，那么这两个球的体积之比为_____.

【典型例题】

例 9-8-1　如图 9-8-1 所示，圆锥 SO 的高为 20，A、B 为底面圆周上的两点，且 $\angle AOB=90^\circ$，截面 SAB 与圆锥的底面成 45° 的二面角，求棱锥 $S-OAB$ 的体积.

【要点解析】求棱锥 $S-OAB$ 的体积的关键是△ OAB 的面积.

【解】取 AB 的中点 H，连接 SH、OH，则 $AB \perp SH$，

$AB \perp OH$，

$\therefore \angle SHO = 45^\circ \quad \therefore OH = SO = 20$

又 $AB = 2OH = 40$

$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times AB \times OH = 400$

$\therefore V_{S-OAB} = \frac{1}{3} S_{\triangle OAB} \times SO = \frac{1}{3} \times 400 \times 20 = \frac{8000}{3}$.

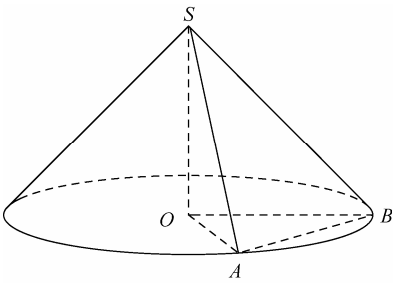


图 9-8-1

例 9-8-2 如图 9-8-2 所示，已知四边形 AA_1B_1B 是圆柱 OO_1 的轴截面，底面直径 $A_1B_1 = 2$，母线 $AA_1 = 2$，D 是底面圆周上一点，且 $\angle DA_1B_1 = 60^\circ$.

（1）求证：平面 $AA_1D \perp$ 平面 BB_1D；

（2）求直线 AD 与平面 AA_1B_1B 所成角的正切值；

（3）求三棱锥 $A-A_1DB_1$ 的体积.

【要点解析】本题主要考查线线、线面、面面的判定与性质，斜线与平面所成的角以及锥体的体积公式.

（1）**【证明】**由题意 A_1B_1 是底面圆的直径，D 是圆周上一点

$\therefore B_1D \perp A_1D$ ①

又∵母线 $AA_1 \perp A_1DB_1$

$\therefore AA_1 \perp B_1D$ ②

由①②知 $B_1D \perp$ 平面 AA_1D

又∵ $B_1D \subset$ 平面 BB_1D

∴平面 $AA_1D \perp$ 平面 BB_1D

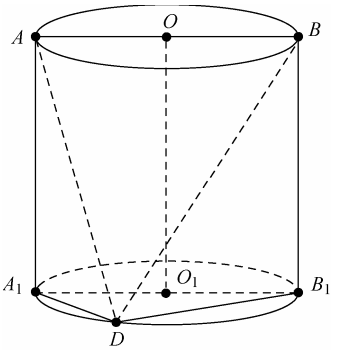


图 9-8-2

（2）**【解】**在 Rt△A_1DB_1 中，过 D 作 $DE \perp A_1B_1$，垂足为 E，

连接 AE

∵ $AA_1 \perp$ 平面 A_1B_1D

$\therefore A_1A \perp DE$

$\therefore DE \perp$ 平面 AA_1B_1B

$\therefore \angle DAE$ 是直线 AD 与平面 AA_1B_1B 所成的角

又∵ $\angle DA_1B_1 = 60^\circ$，且 $A_1B_1 = 2$

$\therefore DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$A_1E = \frac{1}{2}$，$AA_1 = 2$

$\therefore AE = \frac{\sqrt{17}}{2} \quad \therefore \tan\angle DAE = \frac{DE}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{51}}{17}$

即直线 AD 与平面 AA_1B_1B 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{51}}{17}$.

（3）∵ $S_{\triangle A_1B_1D} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore V_{A-A_1DB_1}=\frac{1}{3}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【巩固提高】

一、强化训练

1. 已知圆柱的轴截面是一个面积为 4 的正方形，则圆柱的全面积是　　（　　）

A．2π　　B．4π　　C．6π　　D．8π

2. 圆锥的轴截面是等边三角形，那么它的侧面展开图扇形的圆心角是　　（　　）

A．60°　　B．90°　　C．180°　　D．270°

3. 已知圆锥的底面圆周长为 4π，母线长为 $\sqrt{5}$，则该圆锥的体积为　　（　　）

A．$\frac{4\pi}{3}$　　B．$\frac{8\pi}{3}$　　C．4π　　D．$\frac{16\pi}{3}$

4. 设一圆锥的轴截面的面积为 $\sqrt{3}$，底面半径为 1，则此圆锥的体积为_____.

5. 已知圆锥的高 PO 为 $\sqrt{2}$，过顶点 P 的一个截面 PAB 与底面成二面角为 45°，且截面 PAB 面积为 4，则此圆锥侧面积为_____.

6. 球的表面积扩大 4 倍，则球的体积扩大_____倍.

7. 已知圆锥母线与底面所成角为 60°，过高的中点且平行于底面的截面半径为 2cm，求它的侧面积和体积.

二、能力拓展

8. 设一球内切内于圆锥，球的半径为 2cm，圆锥的高为 8cm，求圆锥的全面积和体积.

【高考链接】

（2012 年单招试题）若圆锥的表面积为 S，且它的侧面展开图是一个半圆，则这个圆锥的底面直径为（　　）

A．$\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$　　B．$2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$　　C．$\sqrt{\frac{S}{5\pi}}$　　D．$2\sqrt{\frac{S}{5\pi}}$

本章小结与复习

【知识结构】

- 多面体与旋转体
 - 柱体
 - 棱体
 - 直棱柱→正棱柱
 - 斜棱柱
 - 圆柱
 - 锥体
 - 棱锥→正棱锥
 - 圆锥
 - 球体
- 平面及其基本性质
 - 平面的概念
 - 三个公理
 - 三个推论
- 位置关系
 - 平行
 - 线线平行
 - 线面平行
 - 面面平行
 - 垂直
 - 线线垂直
 - 线面垂直
 - 面面垂直
- 空间角
 - 异面直线所成的角
 - 直线与平面所成的角
 - 二面角

【考纲解读】

立体几何在中职数学中的地位非常重要. 首先立体几何在中职数学中有一个特殊的地位，那就是锻炼和培养学生的空间想象能力和逻辑推理能力，是数学中任何其他知识无法替代的；其次立体几何是研究现实世界三维空间的，所以学生在将来的实际生活中必然会用到；另外立体几何是单招考试的必考知识点. 在平时的教学中要求学生能直观认识和理解点、线、面的位置关系；能用数学语言表述有关平行、垂直的性质与判定，并对某些结论进行论证. 新教材降低了对立体几何的要求，教师在平时的教学中要注重体现基础性和应用性.

考　点	要 求
平面及其基本性质	了 解
空间两条直线的位置关系	了 解
直线与平面的位置关系	理 解
平面与平面的位置关系	了 解
柱、锥、球及其组合体	了 解

【考题剖析】

例 9-1　（2010 年单招试题）若一圆柱的轴截面是边长为 2 的正方形，则此圆柱的表面积为（　　）

A. 2π　　B. 4π　　C. 5π　　D. 6π

【剖析】由圆柱的轴截面是边长为 2 的正方形可得圆柱的底面圆半径为 1，圆柱的高为 2，根据圆柱的表面积公式 $S=2\pi r^2+2\pi rh=6\pi$，故选 D.

本题主要考查圆柱的轴截面及表面积公式有关知识点.

例 9-2　（2008 年单招试题）在下列条件下，可判定两平面平行的是（　　）

A. 两平面平行于同一条直线　　B. 两平面垂直于同一条直线

C. 两平面垂直于同一平面　　D. 两平面内分别有无数条直线互相平行

【剖析】由面面平行的判定和性质可知选 B.

本题主要考查面面平行的判定和性质有关知识点.

例 9-3　（2013 年单招试题）如果一个圆锥的侧面展开图是半圆，那么其母线与底面所成角的大小是（　　）

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 75°

【剖析】由圆锥的侧面展开图是一个半圆，得 $\frac{r}{l}\times 2\pi=\pi$，所以 $l=2r$；

由 $\cos\alpha=\frac{r}{l}=\frac{1}{2}$，故选 C.

本题主要考查圆锥的侧面展开图圆心角公式和直线与平面所成的角.

例 9-4　（2004 年单招试题）已知直线 l 和平面 α，$l\perp\alpha$，$A\in l$，$B\in l$，直线 $CD\subset\alpha$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=$_____.

【剖析】由线面关系得 $AB\perp\alpha$，$AB\perp CD$，由向量的内积得：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

本题主要考查线面、线线的垂直关系及向量的内积等知识点.

例 9-5 （2012 年单招试题）如图 9-1 所示，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD=AA_1=1$，$AB=2$.

（1）证明：当点 E 在棱 AB 上移动时，$D_1E\perp A_1D$；

（2）当 E 为 AB 的中点时，求①二面角 D_1-EC-D 的正切值；②点 B 到平面 ECB_1 的距离.

【剖析】（1）连接 AD_1，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

因为 $AD=AA_1$，所以 AA_1D_1D 为正方形，从而 $AD_1\perp A_1D$.

因为点 E 在棱 AB 上，所以 AD_1 就是 ED_1 在平面 AA_1D_1D 上的射影，

从而 $D_1E\perp A_1D$.

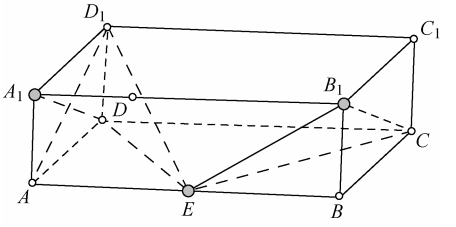


图 9-1

（2）① 连接 DE. 由题意知 $AD=AA_1=1$，$AE=EB=1$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DAE$ 中，$DE=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle EBC$ 中，$EC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

从而 $DE^2+EC^2=4=DC^2$，所以 $EC\perp DE$，

又由 $D_1D\perp$ 面 $ABCD$ 知 $D_1D\perp EC$，即 $EC\perp D_1D$，

从而 $EC\perp$ 面 D_1DE，所以 $EC\perp D_1E$，

因此 $\angle D_1ED$ 是二面角 D_1-EC-D 的平面角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle D_1DE$ 中，$\tan\angle D_1ED=\dfrac{D_1D}{DE}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

即二面角 D_1-EC-D 的正切值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

② 设点 B 到平面 ECB_1 的距离为 h，

由 $EB=BC=BB_1=1$ 知 $EC=B_1C=B_1E=\sqrt{2}$，$S_{\triangle ECB_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $V_{B-ECB_1}=V_{B_1-ECB}$，所以 $\dfrac{1}{3}S_{\triangle ECB_1}\cdot h=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ECB}\cdot BB_1$，

即 $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot h=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1$，所以 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故点 B 到平面 ECB_1 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

本题是一道综合题，考查的知识点比较多，主要有线线、线面、面面垂直的判定与性质和二面角的求法以及用等积法求点到平面的距离等知识点.

例 9-6　（2013 年单招试题）在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面边长为 2，侧棱长为 $\sqrt{3}$，D 是 AC 的中点.

（1）求三棱锥 A_1-ABC 的体积;

（2）求证：直线 B_1C // 平面 A_1BD;

（3）求二面角 A_1-BD-A 的大小.

【解】（1）∵正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 底面边长为 2

$$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times \sin 60^\circ=\sqrt{3}$$

又 $A_1A_1=\sqrt{3}$

$$\therefore V_{A_1-ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot AA_1=1$$

（2）连接 AB_1，交 AB_1 于 O

∵ $ABC-A_1B_1C_1$ 是正三棱柱

∴ O 为 AB_1 的中点，又 D 为 AC 的中点

∴ OD 为 $\triangle AB_1C$ 的中位线　∴ $OD // B_1C$

又 $OD\subset$ 平面 A_1BD

∴ B_1C // 平面 A_1BD

（3）∵正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，∴ $BD\perp AD$，又 $AA_1\perp$ 平面 ABC

∴ $\angle ADA_1$ 为三面角 A_1-BD-A 的平面角

又 $AA_1=\sqrt{3}$，$AD=1$　∴ $\angle ADA_1=60^\circ$

本题是一道综合题，考查的知识点比较多，主要有线线、线面、面面平行的判定与性质和二面角的求法以及多面体的体积等知识点.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 设 a、b、c 是三条不同的直线，α、β、γ 是三个不同的平面，下列命题中正确的是（　　）

A．若 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则 $\alpha // \beta$　　B．若 $a\perp\beta$，$\alpha\perp\beta$，则 $a // \alpha$

C．若 $a\perp\alpha$，$a\perp\beta$，则 $\alpha // \beta$　　D．若 $a\perp c$，$b\perp c$，则 $a // b$

2. 若 l、m 表示直线，α、β 表示平面.

① 若 $l\perp\alpha$，$l // \beta$，则 $\alpha\perp\beta$;

② 若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$m\perp l$，则 $m\perp\beta$;

③ 若 $l\subset\beta$，m 和 l 不互相垂直，则 m 和 β 不互相垂直;

④ 若 $\alpha\perp\beta$，$l // \alpha$，则 $l\perp\beta$.

其中正确的命题是（　　）

A．②③　　B．②④　　C．①③　　D．③④

3. 圆锥的侧面展开图是面积为 4π 的半圆，则这个圆锥的体积为_____.

4. 一圆锥的母线长为 5 cm，高为 4 cm，则该圆锥的侧面积为_____cm^2.

5. 圆锥轴截面的顶角为 120°，过顶点的截面三角形的最大面积为 8，则该圆锥的侧面积为

_____.

6. 已知圆柱的侧面积为 S，底面的周长为 C，则它的体积等于_____.

二、能力拓展

7. 如图 9-2 所示，在圆锥 PO 中，已知 $PO=\sqrt{2}$，圆 O 的直径 $AB=2$，点 C 在圆 O 上，且 $\angle CAB=30^\circ$，D 为 AC 的中点.

（1）证明：$AC\perp$ 平面 POD；

（2）求直线 OC 和平面 PAC 所成角的正弦值.

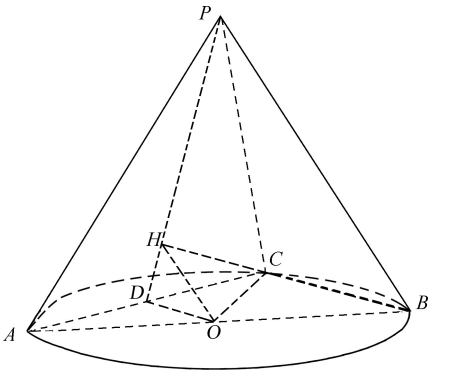


图 9-2

8. 如图 9-3 所示，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=1$，$AC=AA_1=\sqrt{3}$，$\angle BAC=90^\circ$.

（1）证明：$AB\perp A_1C$；（2）求二面角 $A-A_1C-B$ 的正切值.

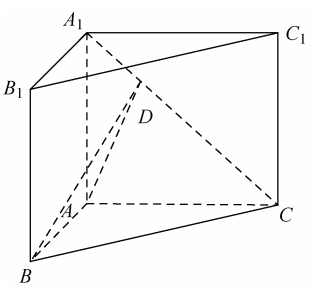


图 9-3

第 10 章　概率统计

10.1　计数原理

【学习目标】

1．知识目标：（1）理解分类加法计数原理与分步乘法计数原理；
（2）会利用两个原理分析和解决一些简单的应用问题.
2．能力目标：（1）引导学生形成“自主学习”与“合作学习”等良好的学习习惯；
（2）通过具体问题情境总结出两个计数原理，借助实际事例感悟两个原理并能够应用.

【知识精要】

1. 分类计数原理

完成一件事，有 n 类办法，在第1类办法中有 m_1 种不同的方法，在第 2 类办法中有 m_2 种不同的方法，……在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法.

2. 分步计数原理

完成一件事，需要分 n 个步骤，做第1步有 m_1 种不同的方法，做第 2 步有 m_2 种不同的方法，……做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法.

【基础过关】

1．书架上下层分别放有 5 本不同的科技书和 4 本不同的文学书，从中任选一本书，不同的选法有（　　）

A．30 种　　B．32 种　　C．18 种　　D．9 种

2．从 A 地到 B 地要经过 C 地和 D 地，从 A 地到 C 地有 3 条路，从 C 地到 D 地有 2 条路，从 D 地到 B 地有 4 条路，则从 A 地到 B 地不同的走法有（　　）

A．9 种　　B．20 种　　C．24 种　　D．3 种

3．从 A 村到 B 村道路有 2 条，从 B 村到 C 村的道路有 3 条，从 A 村直接到 C 村的道路有 2 条，那么从 A 地到 C 地不同的走法有（　　）

A．6 种　　B．7 种　　C．8 种　　D．12 种

【典型例题】

例 10-1-1　在填写高考志愿表时，一名高中毕业生了解到，A、B、C 三所大学各有一些自己感兴趣的强项专业，具体情况如下：

大学	A	B	C
强项专业	生物学 数学 新闻学 化学 会计学	人力资源学 医学 信息技术学 金融学	物理学 法学 工程学

如果这名同学只能选一个专业，那么他共有多少种选择呢？

【要点解析】由于这名同学在 A、B、C 三所大学中只能选择一所，而且只能选择一个专业，又由于三所大学没有共同的强项专业，因此符合分类加法计数原理的条件.

【解】这名同学可以选择 A、B、C 三所大学中的一所．在 A 大学中有 5 种专业选择方法，在 B 大学中有 4 种专业选择方法，在 C 大学有 3 种专业可供选择．又由于没有一个强项专业是三所大学共有的，因此根据分类加法计数原理，这名同学可能的专业选择共有 $5+4+3=12$（种）.

例 10-1-2　某学校食堂备有 5 种素菜、3 种荤菜、2 种汤. 现要配成一荤一素一汤的套餐. 问可以配制出多少种不同的品种？

【要点解析】（1）完成的这件事是什么？

（2）如何完成这件事？（配一个荤菜、配一个素菜、配一汤）

（3）它们属于分类还是分步？（是否独立完成）

（4）运用哪个计数原理？

（5）进行计算.

【解】属于分步：第一步　配一个荤菜　有 3 种选择

第二步　配一个素菜　有 5 种选择

第三步　配一个汤　　有 2 种选择

共有 $N=3\times5\times2=30$（种）

【巩固提高】

一、强化训练

1. 有 3 封不同的信，任意投入到 5 个不同的信箱中，则不同的投法为　　（　　）

A．729　　B．125　　C．15　　D．27

2. 从 5 个学生中选出 2 人，其中一人做班长，另一人做团支书，则不同的选法有（　　）

A．20　　B．10　　C．25　　D．都不对

3. 已知：$a\in\{-1,\ 2,\ 3\}$，$b\in\{0,\ 1,\ 3,\ 4\}$，$k\in\{1,\ 2\}$，则方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=k^2$ 所表示的不同的圆的个数有　　（　　）

A．24　　B．18　　C．9　　D．14

4. 有一个书架共有 2 层，上层放有 5 本不同的数学书，下层放有 4 本不同的语文书.

（1）从书架上任取一本书，有多少种不同的取法？

（2）从书架上任取一本数学书和一本语文书，有多少种不同的取法？

5. 有一个班级共有 46 名学生，其中男生有 21 名.

（1）现要选派一名学生代表班级参加学校的学代会，有多少种不同的选派方法？

（2）若要选派男、女各一名学生代表班级参加学校的学代会，有多少种不同的选派方法？

6. 从甲地到乙地有 2 条路可通，从乙地到丙地有 3 条路可通；从甲地到丁地有 4 条路可通，从丁地到丙地有 2 条路可通. 从甲地到丙地共有多少种不同的走法？

7. 有1、2、3、4、5 五个数字.

（1）可以组成多少个不同的三位数？

（2）可以组成多少个无重复数字的三位数？

（3）可以组成多少个无重复数字的三位偶数？

二、能力拓展

8. 书架上放有 3 本不同的数学书，5 本不同的语文书，6 本不同的英语书.

（1）若从这些书中任取一本，有多少种不同的取法？

（2）若从这些书中，取数学书、语文书、英语书各一本，有多少种不同的取法？

（3）若从这些书中取不同科目的书两本，有多少种不同的取法？

9. 有0、1、2、3、4、5六个数字.

（1）可以组成多少个不同的三位数？

（2）可以组成多少个无重复数字的三位数？

（3）可以组成多少个无重复数字的偶数的三位数？

【高考链接】

（2006年单招试题）由数字0,1,2,3最多可组成_____个没有重复数字的四位偶数.

10.2 随机事件和概率

【学习目标】

1．知识目标：（1）了解随机事件、必然事件、不可能事件的概念；

（2）通过试验了解随机事件发生的不确定性和频率的稳定性;

（3）明确概率与频率的区别和联系，理解利用频率估计概率的思想方法.

2．能力目标：（1）通过学生自己动手、动脑和亲身试验来理解知识，体会数学知识与现实世界的联系；

（2）培养学生的辩证唯物主义观点，增强学生的科学意识，并通过数学史的渗透，培养学生刻苦严谨的科学精神.

【知识精要】

1．随机事件的概念

试验的每一种可能的结果就是一个事件.

（1）随机事件：在一定条件下可能发生也可能不发生的事件，随机事件简称事件；

（2）必然事件：在一定条件下必然会发生的事件，用Ω表示；

（3）不可能事件：在一定条件下不可能发生的事件用ϕ表示.

2．随机事件 A 的概率

在大量重复进行同一试验时，事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 总接近于某个常数，且在它附近摆动，这时就把这个常数叫做事件 A 的概率，记作 $P(A)$.

由定义可知 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$，显然必然事件的概率是1即 $P(\Omega)=1$，不可能事件的概率是 0 即 $P(\varnothing)=0$.

【基础过关】

1. 下列试验能够构成事件的是　　（　　）

A. 掷一次硬币　　B. 射击一次　　C. 标准大气压下，水烧至 100℃　　D. 摸彩票中头奖

2. 在 1，2，3，…，10 这 10 个数字中，任取 3 个数字，那么“这三个数字的和大于 6”这一事件是　　（　　）

A. 必然事件　　B. 不可能事件　　C. 随机事件　　D. 以上选项均不正确

3. 随机事件 A 的频率 $\frac{m}{n}$ 满足　　（　　）

A. $\frac{m}{n}=0$　　B. $\frac{m}{n}=1$　　C. $0<\frac{m}{n}<1$　　D. $0 \leqslant \frac{m}{n} \leqslant 1$

【典型例题】

例 10-2-1　如果某种彩票中奖的概率为 $\frac{1}{1000}$，那么买1000 张彩票一定能中奖吗？请用概率的意义解释.

【要点解析】买1000 张彩票，相当于1000 次试验，因为每次试验的结果都是随机的，所以做1000 次试验的结果也是随机的.

【解】不一定能中奖，因为，买1000 张彩票相当于做1000 次试验，每次试验的结果都是随机的，即每张彩票可能中奖也可能不中奖，因此，1000 张彩票中可能没有一张中奖，也可能有一张、两张乃至多张中奖.

例 10-2-2　在一场乒乓球比赛前，裁判员利用抽签器来决定由谁先发球，请用概率的知识解释其公平性.

【解】这个规则是公平的，因为抽签上抛后，红圈朝上与绿圈朝上的概率均是 0.5，因此任何一名运动员猜中的概率都是 0.5，也就是每个运动员取得先发球权的概率都是 0.5.

例 10-2-3　某种菜籽在相同的条件下发芽试验结果如表 10-2-1 所示：

表 10-2-1

种子粒数	10	70	130	310	700	1500	2000	3000
发芽粒数	9	60	116	282	639	1339	1806	2715

求其发芽的概率.

【要点解析】可以用频率的趋向近似值表示随机事件发生的概率.

【解】我们根据表格只能计算不同情况下的种子发芽的频率分别是：0.9，0.875，0.892，0.910，0.913，0.893，0.903，0.905．随着种子粒数的增加，菜籽发芽的频率越接近于0.9，且在它附近摆动，故此种子发芽的概率为0.9．

【巩固提高】

一、强化训练

1. 下面事件是必然事件的有 （　　）

①如果a、$b\in\mathbf{R}$，那么$a\cdot b=b\cdot a$；②某人买彩票中奖；③$3+5>10$．

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ①②

2. 下面事件是随机事件的有：①连续两次掷一枚硬币，两次都出现正面朝上；②异性电荷，相互吸引；③在标准大气压下，水在1℃时结冰． （　　）

A. ②　　B. ③　　C. ①　　D. ②③

3. 判断下列事件哪些是必然事件，哪些是不可能事件，哪些是随机事件？

（1）“导体通电后，发热”；

（2）“抛出一块石块，自由下落”；

（3）“某人射击一次，中靶”；

（4）“在标准大气压下且温度低于0 ℃时，冰自然融化”；

（5）“方程$x^2+1=0$有实数根”；

（6）“如果$a>b$，那么$a-b>0$”；

（7）“西方新闻机构CNN撒谎”；

（8）“从标号分别为1、2、3、4、5的5张标签中，抽到1号签”．

4. 某地区从某年起几年内的新生婴儿数及其中男婴数如表10-2-2所示（结果保留两位有效数字）：

表10-2-2

时间范围	1年内	2年内	3年内	4年内
新生婴儿数	5544	9013	13520	17191
男婴数	2716	4899	6812	8590
男婴出生频率				

（1）填写表中的男婴出生频率；

（2）该地区男婴出生的概率约是_____.

5. 某批乒乓球产品质量检查结果如表10-2-3所示，则乒乓球是优等品的概率约是多少？

表10-2-3

抽取球数n	50	100	200	500	1000	2000
优等品数m	45	92	194	470	954	1902
优等品频率m/n	0.9	0.92	0.97	0.94	0.954	0.951



6. 进行这样的试验：从 0，1，2，…，9 这十个数字中随机取一个数字，重复进行这个试验 10000 次，将每次取得的数字依次记下来，我们就得到一个包括 10000 个数字的“随机数表”. 在这个随机数表里，可以发现 0，1，2，…，9 这十个数字中各个数字出现的频率稳定在 0.1 附近. 现在我们把一个随机数表等分为 5 段，每段包括 2000 个随机数，统计每 2000 个随机数中数字“7”出现的频率，得到如表 10-2-4 所示的结果：

表 10-2-4

段　　序	1	2	3	4	5
出现“7”的频数	183	207	194	171	213
出现“7”的频率	0.0915	0.1035	0.097	0.0855	0.1065

求“7”这个数字出现的概率.

二、能力拓展

7. 历史上曾经有人做过大量的抛掷硬币的实验得到如表 10-2-5 所示数据：

表 10-2-5

试验次数	正面朝上的频数	正面朝上的比例
2048	1061	0.5181
4040	2048	0.5069
12000	6019	0.5016
24000	12012	0.5005
30000	14984	0.4996
72088	36124	0.5011

你与同座位的同学也试试看，你认为这些数据说明了什么？

10.3 概率的简单性质

【学习目标】

1．知识目标：（1）理解互斥事件、对立事件的概念，理清互斥事件与对立事件的区别与联系；

（2）理解互斥事件的加法公式与对立事件的反演公式.

2．能力目标：培养学生归纳与类比的数学思想.

【知识精要】

1. 必然事件的概率是1即 $P(\Omega)=1$，不可能事件的概率是0即 $P(\varnothing)=0$，因此对于事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

2. 不可能同时发生的两个事件称为互斥事件，当事件 A 与 B 互斥时，满足加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

3. 若两个互斥事件必有一个发生，则称这两个事件为对立事件．事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$，对立事件 $\overline{A}$ 与 A 必有一个发生，故 $\overline{A}\cup A=\Omega$ 是必然事件，从而

$P(\overline{A})+P(A)=P(\overline{A}\cup A)=1$，即 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

4. 如果事件 A_1，A_2，…，A_n 彼此互斥，那么

$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

【基础过关】

1．从一堆产品（其中正品与次品都多于2件）中任取2件，观察正品件数与次品件数，判断下列每对事件是不是互斥事件，如果是，再判断它们是不是对立事件.

（1）恰好有1件次品和恰好有2件次品；

（2）至少有1件次品和全是次品；

（3）至少有1件正品和至少有1件次品；

（4）至少有1件次品和全是正品.

2. 回答下列问题：

（1）甲、乙两射手同时射击一目标，甲的命中率为0.65，乙的命中率为0.60，那么能否得出结论：目标被命中的概率等于0.65 + 0.60 = 1.25，为什么？



（2）一射手命中靶的内圈的概率是 0.25，命中靶的其余部分的概率是 0.50，那么能否得出结论：目标被命中的概率等于 $0.25+0.50=0.75$，为什么？

（3）两人各掷一枚硬币，“同时出现正面”的概率可以算得为 $\frac{1}{2^2}$. 由于“不出现正面”是上述事件的对立事件，所以它的概率等于 $1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$. 这样做对吗？说明道理.

3．抛掷一颗均匀的骰子，用 A 表示“向上的点数至少为 5”，则（1）$\overline{A}$ 指什么事件？（2）$\overline{A}$ 的对立事件指什么？

【典型例题】

例 10-3-1　某地政府准备对当地的农村产业结构进行调整，为此政府进行了一次民意调查. 100 个人接受了调查，他们被要求在赞成调整、反对调整、对这次调整不发表看法中任选一项. 调查结果如表所示：

	男	女	总计
赞成	18	9	27
反对	12	25	37
不发表看法	20	16	36
总计	50	50	100

随机选取一个被调查者，他对这次调整表示反对或不发表看法的概率是多少？

【要点解析】解题的重点是要判断两个事件的关系.

【解】设事件 A：对这次调整表示反对，事件 B：对这次调整不发表看法，事件 A 与事件 B 是互斥事件，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{37}{100}+\frac{36}{100}=0.73$.

例 10-3-2　（1）如果事件 A 与事件 B 互斥，那么 $P(A)+P(B)$ 与 1 的大小关系如何？

（2）如果事件 A 与事件 B 相互对立，那么 $P(A)+P(B)$ 与 1 的大小关系如何？

（3）若事件 A 与事件 B 相互对立，那么事件 A 与事件 B 互斥吗？反之，若事件 A 与事件 B 互斥，那么事件 A 与事件 B 相互对立吗？

【解】（1）$P(A)+P(B)\leqslant 1$；（2）$P(A)+P(B)=1$

（3）若事件 A 与事件 B 相互对立，那么事件 A 与事件 B 互斥；反之，若事件 A 与事件 B 互斥，那么事件 A 与事件 B 未必相互对立.

例 10-3-3 袋中有 12 个小球，分别为红球、黑球、黄球、绿球，从中任取一球，已知取到红球的概率是$\frac{1}{3}$，取到黑球或黄球的概率是$\frac{5}{12}$，取到黄球或绿球的概率也是$\frac{5}{12}$，试求取到黑球、黄球、绿球的概率分别是多少？

【要点解析】首先判断各事件之间的关系，然后用适当的公式解题.

【解】设事件 A：任取一球，取到红球，事件 B：任取一球，取到黑球，事件 C：任取一球，取到黄球，事件 D：任取一球，取到绿球，事件 A、B、C 与 D 是彼此互斥事件，由题意 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(C\cup B)=P(C)+P(B)=\frac{5}{12}$，且 $P(C\cup D)=P(C)+P(D)=\frac{5}{12}$，$P(A\cup B\cup C\cup D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1$.

解得 $P(C)=\frac{1}{6}$，$P(B)=P(D)=\frac{1}{4}$.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 把红、蓝、黑、白 4 张纸牌随机分给甲、乙、丙、丁四人，每人分得一张，那么事件“甲分得红牌”与事件“乙分得红牌”是（　　）

A. 对立事件　　B. 互斥但不对立事件　　C. 必然事件　　D. 不可能事件

2. 某射手进行一次射击，试判断下列事件哪些是互斥事件？哪些是对立事件？

事件 A：命中环数大于 7 环；事件 B：命中环数为 10 环；

事件 C：命中环数小于 6 环；事件 D：命中环数为 6、7、8、9、10 环.

3．如果从不包括大小王的 52 张扑克牌中随机抽取一张，那么取到红心（事件 A）的概率是 0.25，取到方片（事件 B）的概率是 0.25，问：

（1）取到红色牌（事件 C）的概率是多少？（2）取到黑色牌（事件 D）的概率是多少？

4. 在一只袋子中装有 7 个红玻璃球，3 个绿玻璃球，从中无放回地任意抽取两次，每次只取一个. 试求：（1）取到两个红球的概率；（2）取到两个绿球的概率；（3）取到两个同颜色的球的概率；（4）至少取到一个红球的概率.

5. 某单位 36 人的血型类别是：A 型 12 人，B 型 10 人，AB 型 8 人，O 型 6 人. 现从这 36 人中任选 2 人，求此 2 人血型不同的概率.

6. 玻璃球盒中装有各色球 12 只，其中 5 红、4 黑、2 白、1 绿.

（1）从中取 1 个球，求取到红球或黑球的概率；

（2）从中取 2 个球，求至少取到 1 个红球的概率.

二、能力拓展

7. 某学校成立了数学、英语、音乐 3 个课外兴趣小组，3 个小组分别有 39、32、33 个成员，一些成员参加了不止 1 个小组，具体情况如图 10-3-1 所示. 随机选取 1 个成员：

（1）他至少参加 2 个小组的概率是多少？

（2）他参加不超过 2 个小组的概率是多少？

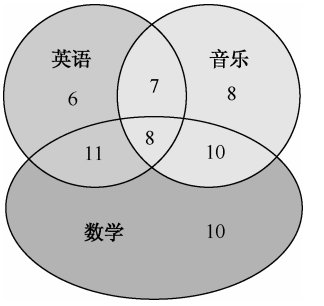


图 10-3-1

8. 在放有 5 个红球、4 个黑球、3 个白球的袋中，任意取出 3 个球，分别求出 3 个全是同色球的概率及全是异色球的概率.

【高考链接】

（2006 年单招试题）如果事件 A 与事件 B 互斥，那么 （　　）

A. A 与 B 是对立事件　　B. $A\cup B$ 是必然事件

C. $\overline{A}\cup\overline{B}$ 是必然事件　　D. $\overline{A}$与$\overline{B}$ 互不相容

10.4　等可能事件的概率（一）

【学习目标】

1．知识目标：（1）理解古典概型的两个特征及其概率计算公式;

（2）会用列举法计算一些随机事件所含的基本事件数及事件发生的概率.

2．能力目标：（1）培养学生观察比较、归纳问题的能力;

（2）渗透数形结合、分类讨论的思想方法.

【知识精要】

1. 古典概型：我们将具有这两个特点：（1）试验中所有可能出现的基本事件只有有限个；（2）每个基本事件出现的可能性相等的概率模型称为古典概率模型，简称古典概型.

2. 基本事件的两个特点：（1）任何两个基本事件是互斥的；（2）任何事件（除不可能事件）都可以表示成基本事件的和.

3. 古典概型的概率计算：$P(A)=\dfrac{m}{n}$，其中 m 是指事件 A 包含的基本事件数，n 是指基本事件总数.

【基础过关】

1. 掷一枚质地均匀的硬币，观察出现哪几种结果？出现各种结果的可能性相同吗？

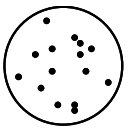
2. 抛掷一颗均匀的骰子一次，观察出现的点数有哪几种结果？出现各种结果的可能性相同吗？

3. 抛掷一颗均匀的骰子一次，事件“出现奇数点”的概率是多少？

【典型例题】

例 10-4-1　（1）向一个圆面内随机地投射一个点，如果该点落在圆内任意一点都是等可能的，你认为这是古典概型吗?为什么？

（2）如图，某同学随机地向一靶心进行射击，这一试验的结果只有有限个：命中 10 环、命中 9 环……命中 5 环和不中环. 你认为这是古典概型吗？为什么？





【要点解析】一定要抓住古典概型的两个特点来判断.

【解】（1）不是古典概型，因为试验的所有可能结果是圆面内所有的点，试验的所有可能结果数是无限的，虽然每一个试验结果出现的“可能性相同”，但这个试验不满足古典概型的第一个条件.

（2）不是古典概型，因为试验的所有可能结果只有 7 个，而命中 10 环、命中 9 环……命中 5 环和不中环的出现不是等可能的，即不满足古典概型的第二个条件.

例 10-4-2　将骰子先后抛掷 2 次，计算：

（1）一共有多少种不同的结果？

（2）其中向上的数之和是 5 的结果有多少种？

（3）向上的数之和是 5 的概率是多少？

【解】（1）将骰子抛掷 1 次，它落地时向上的数有 1、2、3、4、5、6 这 6 种结果. 根据分步计数原理，先后将这个骰子抛掷 2 次，一共有 6×6=36 种不同的结果.

（2）在上面所有结果中，向上的数之和是 5 的结果有（1，4），（2，3），（3，2），（4，1）4 种.

（3）由于骰子是均匀的，将它抛掷 2 次的所有 36 种结果是等可能出现的. 其中“向上的数之和是 5”的结果（记为事件 A）有 4 种，因此所求的概率 $P(A)=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$.

【巩固提高】

一、强化训练

1. 抛掷一个正方体骰子：

（1）落地时向上的点数有_____种结果；

（2）向上的点数是 3 的倍数有_____种结果；

（3）向上的点数是 3 的倍数的概率是_____.

2. 先后抛掷 2 枚均匀的硬币：

（1）一共可能出现_____种不同的结果；

（2）出现“1 枚正面、1 枚反面”的结果有_____种；

（3）出现“1 枚正面、1 枚反面”的概率是_____；

（4）出现“两枚都是反面”的概率是_____.

3. 在 40 根纤维中，有 12 根的长度超过 30mm，从中任取一根，取到长度超过 30mm 的纤维的概率是 （　　）

A. $\frac{30}{40}$　　B. $\frac{12}{40}$　　C. $\frac{12}{30}$　　D. 以上都不对

4. 某人忘记了电话号码的最后一个数字，随意拨号，则拨号不超过三次而接通电话的概率为 （　　）

A. $\frac{9}{10}$　　B. $\frac{3}{10}$　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{10}$

5. 一个口袋内装有大小相等的 1 个白球和已编有不同号码的 3 个黑球，从中摸出 2 个球.

（1）共有多少种不同的结果？

（2）摸出 2 个黑球有多少种不同的结果？

（3）摸出 2 个黑球的概率是多少？

6. 有兄弟俩，一天妈妈单位发了一张球票，他们都想去看，可票只有一张. 哥哥提议：拿一个骰子，每人各掷一次，若点数之和为 6，票就归你，若点数之和是 7，票就归我. 如果你是弟弟，你觉得公平吗？为什么？

二、能力拓展

7. 甲盒子中有红、黑、白三种颜色的球各 3 个，乙盒子中有黄、黑、白三种颜色的球各 2 个，从两个盒子中各取 1 个球，求取出的两个球是不同颜色的概率.

【高考链接】

（2004 年单招试题）8 件产品中有 6 件是正品，2 件是次品，从中任取 2 件，1 件是正品，1 件是次品的概率是_____.

10.5　等可能事件的概率（二）

【学习目标】

1．知识目标：（1）正确理解几何概型的概念，掌握几何概型的概率公式；
（2）会根据古典概型与几何概型的区别与联系来判别概率类型.
2．能力目标：教会学生用数学方法去研究不确定现象的规律，帮助学生获取认识世界的初步知识和科学方法.

【知识精要】

1. 几何概型的定义

如果每个事件发生的概率只与构成该事件几何区域的度量（长度、面积或体积）成比例，则称这样的概率模型为几何概率模型，简称几何概型.

2. 几何概型的特点

（1）基本事件有无限多个；

（2）每个基本事件出现的可能性相等.

3. 几何概型求事件 A 的概率公式

$$P(A)=\frac{\text{构成事件}A\text{的几何区域的度量（长度、面积或体积）}}{\text{试验的全部结果所构成的几何区域的度量（长度、面积或体积）}}$$

4. 古典概型与几何概型的区别

	基本事件的个数	基本事件的可能性	概率公式
古典概型	有限个	相等	$P(A)=\dfrac{A\text{包含基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}$
几何概型	无限个	相等	$P(A)=\dfrac{\text{构成事件}A\text{的几何区域的度量（长度、面积或体积）}}{\text{试验的全部结果所构成的几何区域的度量（长度、面积或体积）}}$

【基础过关】

1. 在区间[0，9]上任取一个实数，恰好取在区间[0，3]上的概率为多少？

2. 如图 10-5-1 中所示的两个转盘，规定当指针指向 B 区域时顾客就中奖了；在两种情况下某顾客中奖的概率分别是多少？

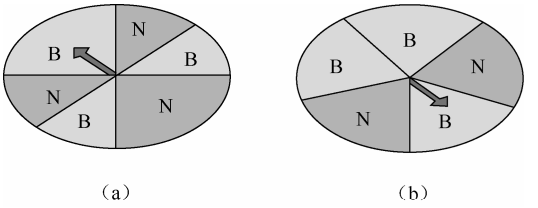


图 10-5-1

3. 在 1 万 km^2 的海域中有 $40km^2$ 的大陆架储藏着石油，假设在海域中任意一点钻探，钻到油层面的概率是多少？

【典型例题】

例 10-5-1 判断下列试验中事件 A 发生的概率是古典概型，还是几何概型.

（1）抛掷两颗骰子，求出现两个“4 点”的概率；

（2）有一个圆形转盘，转盘被分成大小相同的 6 个区域，分别涂上红、黄、绿、黑、紫与橙色. 甲乙两人玩转盘游戏，规定当指针指向红色区域时，甲获胜，否则乙获胜，求甲获胜的概率.

【要点解析】本题考查几何概型与古典概型的特点，古典概型具有有限性和等可能性。而几何概型则是在试验中出现无限多个结果，且与事件的几何区域有关。

【解】（1）抛掷两颗骰子，出现的可能结果有 6×6=36 种，且它们都是等可能的，因此属于古典概型；

（2）游戏中指针指向红色区域时有无限多个结果，而且不难发现“指针落在红色区域”，概率可以用红色区域的面积与总面积的比来衡量，即与几何区域有关，因此属于几何概型.

例 10-5-2　如图 10-5-2 所示，A，B 两盏路灯之间长度是 30m，由于光线较暗，想在其间再随意安装两盏路灯 C、D，问 A 与 C，B 与 D 之间的距离都不小于 10m 的概率是多少？

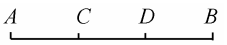


图 10-5-2

【要点解析】从每一个位置安装都是一个基本事件，基本事件有无限多个，但在每一处安装的可能性相等，故是几何概型.

【解】记事件 E：“A 与 C，B 与 D 之间的距离都不小于 10m”，把 AB 三等分，由于中间长度为 $30\times\frac{1}{3}=10\text{m}$，

$$\therefore P(E)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}.$$

例 10-5-3　如图 10-5-3 所示，射箭比赛的箭靶涂有五个彩色的分环. 从外向内依次为白色、黑色、蓝色、红色，靶心为金色. 金色靶心叫“黄心”. 奥运会的比赛靶面直径为 122cm，靶心直径为 12.2cm. 运动员在 70m 外射箭. 假设运动员射的箭都能中靶，且射中靶面内任一点都是等可能的，那么射中“黄心”的概率为多少？

【要点解析】此为几何概型，只与面积有关. 事件的发生是“击中靶心”即“黄心”的面积；总面积为最大环的圆面积.

【解】记“射中黄心”为事件 B，由于中靶点随机地落在面积为 $\frac{1}{4}\times\pi\times122^2\text{cm}^2$ 的大圆内，而当中靶点落在面积为 $\frac{1}{4}\times\pi\times12.2^2\text{cm}^2$ 的“黄心”时，事件 B 发生，于是事件 B 发生的概率为 $P(B)=\dfrac{\frac{1}{4}\times\pi\times12.2^2\text{cm}^2}{\frac{1}{4}\times\pi\times122^2\text{cm}^2}=0.01$.

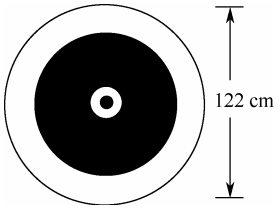


图 10-5-3

即“射中黄心”的概率是 0.01.

【巩固提高】

一、强化训练

1．在长为 10cm 的线段 AB 上任取一点 P，并以线段 AP 为边作正方形，这个正方形的面积介于 25cm^2 与 49cm^2 之间的概率为　（　　）

A．$\frac{3}{10}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$\frac{2}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

2．如图 10-5-4 所示，某人向圆内投镖，如果他每次都投入圆内，那么他投中圆内接正方形区域的概率为　（　　）

A．$\frac{2}{\pi}$　　B．$\frac{1}{\pi}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

3．在区间 [0，10] 中任意取一个数，则它与 4 之和大于 10 的概率是　（　　）

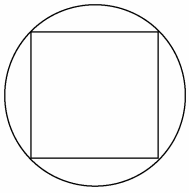


图 10-5-4

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{2}{7}$

4．已知地铁列车每 10min 一班，在车站停 1min，求乘客到达站台立即乘上车的概率.

5. 某人欲从车站乘车，已知该站发往各站的客车均每小时一班，求此人等车时间不多于 10 分钟的概率.

6．一只海豚在水池中游弋，水池为长 30m，宽 20m 的长方形，求此海豚嘴尖离岸边不超过 2m 的概率.

二、能力拓展

7. 在等腰 Rt△ABC 中，在斜边 AB 上任取一点 M，求 AM 的长度小于 AC 的长度的概率.

8．已知如图 10-5-6 所示的矩形，长为 12，宽为 5，在矩形内随机地投掷 1000 粒黄豆，数得落在阴影部分的黄豆数为 600 粒，则可以估计出阴影部分的面积约为_____.

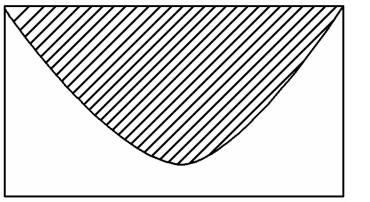


图 10-5-6

10.6　总体、样本和抽样方法（一）

【学习目标】

1．知识目标：（1）了解普查、抽样调查、总体、个体、样本及样本容量等概念；
（2）理解随机抽样的必要性和重要性，提高学生学习数学的兴趣;
（3）学会用抽签法和随机数表法抽取样本，培养学生的应用能力.
2．能力目标：通过对生活中实例的分析解决，体验抽样在生活中的应用，渗透实际问题中的统计思想.

【知识精要】

1. 简单随机抽样的概念

设一个总体含有 N 个个体，从中逐个不放回地抽取 n 个个体作为样本（$n \leqslant N$），如果每次抽取时总体内的各个个体被抽到的机会都相等，就把这种抽样方法叫做简单随机抽样.

2. 简单随机抽样的方法

抽签法、随机数表法和计算器（或计算机）产生随机数法.

3. 抽签法的定义

抽签法就是把总体中的 N 个个体编号，把号码写在号签上，将号签放在一个容器中，搅拌均匀后，每次从中抽取一个号签，连续抽取 n 次，就得到一个容量为 n 的样本. 抽签法的一般步骤：（1）将总体的个体编号；（2）连续抽签获取样本号码.

4. 随机数表法的定义

利用随机数表、随机数骰子或计算机产生的随机数进行抽样，叫随机数表法. 随机数表法的步骤：（1）将总体的个体编号；（2）在随机数表中选择开始数字；（3）获取样本号码.

【基础过关】

1. 为了解我市市区及周边近 170 万人的出行情况，科学规划轨道交通，2010 年 5 月 400 名调查者走入 1 万户家庭，发放 3 万份问卷，进行调查登记．该调查中的样本容量是（　　）

A. 170 万　　B. 400　　C. 1 万　　D. 3 万

2. 某厂生产上海世博会吉祥物“海宝”纪念章 10 万个，质检部门为检测这批纪念章质量的合格情况，从中随机抽查 500 个，合格 499 个．下列说法正确的是　　（　　）

A. 总体是 10 万个纪念章的合格情况，样本是 500 个纪念章的合格情况

B. 总体是 10 万个纪念章的合格情况，样本是 499 个纪念章的合格情况

C. 总体是 500 个纪念章的合格情况，样本是 500 个纪念章的合格情况

D. 总体是 10 万个纪念章的合格情况，样本是 1 个纪念章的合格情况

3．从 45 名学生中，抽取 5 名学生进行问卷调查，写出抽样过程.

【典型例题】

例 10-6-1　下列抽样的方式属于简单随机抽样的有_____.

（1）从无限多个个体中抽取 50 个个体作为样本;

（2）从 1 000 个个体中一次性抽取 50 个个体作为样本;

（3）将 1 000 个个体编号，把号签放在一个足够大的不透明的容器内搅拌均匀，从中逐个抽取 50 个个体作为样本;

（4）箱子里共有 100 个零件，从中选出 10 个零件进行质量检验，在抽样操作中，从中任意取出一个零件进行质量检验后，再把它放回箱子;

（5）福利彩票用摇奖机摇奖.

【解】（1）简单随机抽样是从有限多个个体中抽取，所以（1）不属于；（2）简单随机抽样是逐个抽取，不能是一次性抽取，所以（2）不属于；（3）属于简单随机抽样；（4）简单随机抽样是不放回抽样，所以（4）不属于；（5）属于简单随机抽样．所以答案填：（3）（5）.

例 10-6-2　某车间工人加工一种轴 100 件，为了了解这种轴的直径，要从中抽取 10 件轴在同一条件下测量，如何采用简单随机抽样的方法抽取样本?

【解】 **解法一**（抽签法）将 100 件轴编号为 1，2，…，100，并做好大小、形状相同的号签，分别写上这 100 个数，将这些号签放在一起，进行均匀搅拌，接着连续抽取 10 个号签，然后测量这个 10 个号签对应的轴的直径.

解法二（随机数表法）将 100 件轴编号为 00，01，…，99，在随机数表中选定一个起始位置，如取第 21 行第 1 个数开始，选取 10 个为 68，34，30，13，70，55，74，77，40，44，这 10 件即为所要抽取的样本.

例 10-6-3　要考察某厂生产的饮料的质量是否达标，现从 900 瓶饮料中抽取 50 瓶进行检验，拟用随机数表抽取样本，试写出具体步骤.

【解】第一步　先将 900 瓶饮料编号，可以编为 000，001，…，899.

第二步　在随机数表中任选一个数，例如选出第 8 行第 7 列的数 7（为了便于说明，下面摘取了附表 1 的第 6 行至第 10 行）.

16 22 77 94 39　　49 54 43 54 82　　17 37 93 23 78
84 42 17 53 31　　57 24 55 06 88　　77 04 74 47 67
63 01 63 78 59　　16 95 55 67 19　　98 10 50 71 75
33 21 12 34 29　　78 64 56 07 82　　52 42 07 44 38
57 60 86 32 44　　09 47 27 96 54　　49 17 46 09 62

第三步　从选定的数 7 开始向右读（读数的方向也可以是向左、向上、向下等），得到一个三位数 785，由于 785＜899，说明号码 785 在总体内，将它取出；继续向右读，得到 916，由于 916＞899，将它去掉，按照这种方法继续向右读，又取出 567，199，810，…，依次下去，直到样本的 50 个号码全部取出，这样我们就得到一个容量为 50 的样本.

【巩固提高】

一、强化训练

1．为了了解全校 3690 名学生的体重情况，从中抽取 120 名学生进行测量，下列说法正确的是（　　）

A. 总体是 3690　　B. 个体是每个学生
C. 样本是 120 名学生　　D. 样本容量是 120

2．为了了解某厂所加工的一批方便面的重量，抽测了其中 50 桶方便面的重量，在这个问题中，50 桶方便面的重量是（　　）

A. 总体　　B. 个体
C. 总体的一个样本　　D. 样本容量

3. 对于简单随机抽样，每个个体被抽到的概率（　　）

A. 相等　　B. 不相等
C. 可相等可不相等　　D. 无法确定

4．一个总体中共有 1000 个个体，用简单随机抽样的方法从中抽取一个容量为 25 的样本，则某一特定个体被抽到的可能性是_____.

5．要从某厂生产的 30 台机器中随机抽取 3 台进行测试，写出用抽签法抽取样本的过程.

6. 为了检验某种产品的质量，决定从 40 件产品中抽取 10 件进行检查，写出用随机数表法抽取样本的过程.

二、能力拓展

7. 现有一批编号为 10，11，…，99，100，…，600 的元件，打算从中抽取一个容量为 6 的样本进行质量检验．如何用随机数法设计抽样方案？

10.7 总体、样本和抽样方法（二）

【学习目标】

1．知识目标：理解系统抽样和分层抽样的概念，掌握抽样方法的特点和步骤.
2．能力目标：激发学生自主探究的意识，在探究过程中体会合作学习的乐趣.

【知识精要】

1. 系统抽样的定义

从容量为 N 的总体中抽取容量为 n 的样本，可将总体分成均衡的若干部分，然后按照预

先制定的规则，从每一部分抽取一个个体，得到所需要的样本，这种抽样的方法叫做机械抽样或系统抽样.

2. 系统抽样的一般步骤

（1）编号：采用随机抽样的方法将总体中的 N 个个体编号；

（2）分段：将整体按编号进行分段，确定分段间隔 $k(k\in\mathbf{N})$；

（3）定规：在第一段用简单随机抽样确定起始个体的编号 $l(l\in\mathbf{N},\ l\leqslant k)$；

（4）抽样：按照一定的规则抽取样本，通常是将起始编号 l 加上间隔 k 得到第 2 个个体编号 $l+k$，再加上 k 得到第 3 个个体编号 $l+2k$，这样继续下去，直到获取整个样本.

3. 分层抽样的定义

在抽样时，将总体分成层次分明且互不交叉的层，然后按照一定的比例，从各层独立地抽取一定数量的个体，将各层取出的个体合在一起作为样本，这种抽样的方法叫做分层抽样.

4. 分层抽样的步骤

（1）分层；（2）计算各层的个体数与总体的个数的比值；（3）求各层所要抽取的样本容量.

【基础过关】

1. 下列抽样中不是系统抽样的是　　（　　）

A．从标有 1 至 15 号的 15 个小球中任选 3 个作为样本，按从小号到大号排序，随机确定起点 i，以后为 $i+5$，$i+10$（超过 15 则从 1 再数起）号入样

B．工厂生产的产品，用传送带将产品送入包装车间前，检验人员从传送带上每隔五分钟抽一件产品检验

C．搞某一市场调查，规定在商场门口随机抽一个人进行询问，直到调查到事先规定的调查人数为止

D．电影院调查观众的某一指标，通知每排（每排人数相等）座位号为 14 的观众留下来座谈

2．为了了解参加一次知识竞赛的 1252 名学生的成绩，决定采用系统抽样的方法抽取一个容量为 50 的样本，那么总体中应随机剔除的个体数目是　　（　　）

A．2　　B．4　　C．5　　D．6

3. 某高中共有 900 人，其中高一年级 300 人，高二年级 200 人，高三年级 400 人，现采用分层抽样抽取容量为 45 的样本，那么高一、高二、高三各年级抽取的人数分别为（　　）

A. 15，5，25　　B. 15，15，15

C. 10，5，30　　D. 15，10，20

【典型例题】

例 10-7-1　从某厂生产的 802 辆轿车中随机抽取 80 辆测试某项性能，请合理选择抽样方法进行抽样，并写出抽样过程.

【解】采用系统抽样的方法较为合理，其抽样过程为：

第一步　将 802 辆轿车用随机方式编号；

第二步　从总体中剔除 2 辆（剔除方法可用随机数表法），将剩下的 800 辆轿车重新编号（分别为 001，002，…，800），并分成 80 段；

第三步　在第一段 001，002，…，010 这十个编号中用简单随机抽样法抽出一个（如 005）作为起始号码；

第四步　将编号为 005，015，025，…，795 的个体抽出，组成样本.

例 10-7-2　为了解某市 800 家企业的管理情况，拟抽取 80 个企业作为样本. 已知这 800 家企业中，有中外合资企业 160 家，私营企业 320 家，国有企业 240 家，其他性质的企业 80 家，应如何抽取？写出样本的抽取过程.

【解】采用分层抽样的方法抽取样本较为合理，其抽样过程为：

第一步　分层：按企业性质分成 4 个部分；

第二步　明确中外合资企业、私营企业、国有企业、其他性质的企业各抽的家数：

中外合资企业应抽 $80\div800\times160=16$ 家，

私营企业应抽 $80\div800\times320=32$ 家，

国有企业应抽 $80\div800\times240=24$ 家，

其他性质的企业应抽 $80\div800\times80=8$ 家.

第三步　用随机抽样的方法分别从中外合资企业、私营企业、国有企业、其他性质的企业各抽 16 家，32 家，24 家，8 家，这样便得到了所要抽取的样本.

【巩固提高】

一、强化训练

1．从编号为 1～50 的 50 枚最新研制的某种型号的导弹中随机抽取 5 枚来进行发射实验，若采用每部分选取的号码间隔一样的系统抽样方法，则所选取 5 枚导弹的编号可能是（　　）

A．5，10，15，20，25　　B．3，13，23，33，43

C．1，2，3，4，5　　D．2，4，6，16，32

2．某校高三学生有 253 名，为了了解他们的身体健康状况，按1:5 的比例抽取一个样本，若用系统抽样法抽取，则分段的间隔 $k=$_____，样本容量为_____.

3．某校有老师 200 人，男学生 1200 人，女学生 1000 人，现用分层抽样的方法从所有师生中抽取一个容量为 n 的样本，已知从女学生中抽取的人数为 80 人，则 $n=$_____.

4．某校高中三年级的 295 名学生已经编号为 1，2，…，295，为了了解学生的学习情况，要按 1:5 的比例抽取一个样本，用系统抽样的方法进行抽取，并写出过程.

5．某校有高一学生 400 人，高二学生 302 人，高三学生 250 人，现在按年级分层抽样，从所有学生中抽取一个容量为 190 人的样本．求应该剔除多少人？每个年级分别应抽取多少人？

6. 一个地区共有 5 个乡镇，人口 3 万人，其中人口比例为 3:2:5:2:3，从 3 万人中抽取一个 300 人的样本，分析某种疾病的发病率，已知这种疾病与不同的地理位置及水土有关，问应采取什么样的方法？并写出具体过程.

二、能力拓展

7. 某单位有技工 18 人，技术员 12 人，工程师 6 人，需要从这些人中抽取一个容量为 n 的样本. 如果采用系统抽样和分层抽样方法抽取，都不用剔除个体；如果容量增加一个，则在采用系统抽样时，需要从总体中剔除 1 个个体，则样本容量 n 为（　　）

A．4　　B．5　　C．6　　D．无法确定

8. 某单位一共有职工 510 人，其中老年人 80 人；老年人、青年人、中年人人数依次构成等差数列，为了调查他们的身体情况，用分层抽样的方法从他们中抽取一个容量为 51 的样本，则老年人、青年人、中年人应该抽取的人数依次是（　　）

A．8，17，26　　B．10，17，24

C．5，17，29　　D．16，17，18

10.8　总体分布估计

【学习目标】

1．知识目标：（1）通过实例体会分布的意义和作用；

（2）在表示样本数据的过程中，学会列频率分布表，画频率分布直方图；

（3）通过实例体会频率分布直方图，并准确地做出总体估计.

2．能力目标：通过对样本分析和总体估计的学习，感受数学对实际生活的需要，认识到数学知识源于生活并指导生活的事实，体会数学知识与现实世界的联系.

【知识精要】

1. 频率分布的概念

频率分布是指一个样本数据在各个小范围内所占比例的大小，一般用频率分布直方图反映样本的频率分布. 其一般步骤为：

（1）计算一组数据中最大值与最小值的差，即求极差；（2）确定组距与组数；（3）将数据分组；（4）列频率分布表；（5）画频率分布直方图.

2. 频率分布直方图的特征

（1）从频率分布直方图可以清楚的看出数据分布的总体趋势；

（2）从频率分布直方图得不出原始的数据内容，把数据表示成直方图后，原有的具体数据信息就被抹掉了；

（3）直方的面积和等于 1.

3. 几个相关概念

（1）频数：在某个范围内数据出现的次数；

（2）频率：数据在某个范围出现的频数和数据的总数（样本容量）的比值；

（3）极差 = 最大值 − 最小值，极差又称为全距. 组数 = $\dfrac{\text{极差}}{\text{组距}}$

【基础过关】

1. 有一个容量为 45 的样本数据，分组后各组的频数如下：（12.5，15.5]，3;（15.5，18.5]，8;（18.5，21.5]，9；（21.5，24.5]，11；（24.5，27.5]，10;（27.5，30.5]，4. 由此估计，不大于 27.5 的数据约为总体的 （　　）

A. 91%　　B. 93%　　C. 98%　　D. 30%

2. 一个容量为 20 的样本数据，数据的分组及各组的频数如下：

（10，20），2；（20，30），3；（30，40），4；（40，50），5；（50，60），4；（60，70），2.

则样本在区间（10，50）上的频率为 （　　）

A. 10%　　B. 70%　　C. 40%　　D. 25%

3. 某中学从 2000 名学生中随机抽取 50 名学生参加预防“甲流”知识竞赛，成绩的分组及各组的频数如下（单位：分）：

[40，50），2；[50，60），3；[60，70），10；[70，80），15；[80，90），12；

[90，100]，8.

试列出样本频率分布表.

【典型例题】

例 10-8-1　有 100 名学生，每人只能参加一个运动队，其中参加足球队的有 30 人，参加篮球队的有 27 人，参加排球队的有 23 人，参加乒乓球队的有 20 人.

（1）列出学生参加运动队的频率分布表;

（2）画出频率分布直方图.

【解】（1）参加足球队记为 1，参加篮球队记为 2，参加排球队记为 3，参加乒乓球队记为 4，得频率分布表如表 10-8-1 所示：

表 10-8-1

试验结果	频数	频率
参加足球队（记为 1）	30	0.30
参加篮球队（记为 2）	27	0.27
参加排球队（记为 3）	23	0.23
参加乒乓球队（记为 4）	20	0.20
合　计	100	1.00

（2）由上表可知频率分布直方图如图 10-8-1 所示：

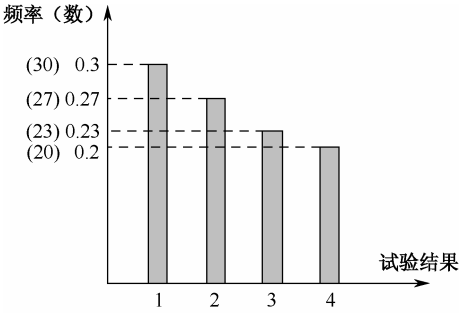


图 10-8-1

例 10-8-2　为了了解中学生的身体发育情况，对某中学 17 岁的 60 名女生的身高进行了测量，结果如下（单位：cm）:

154　159　166　169　159　156　166　162　158
156　166　160　164　160　157　151　157　161
158　153　158　164　158　163　158　153　157
162　159　154　165　166　157　151　146　151
160　165　158　163　163　162　161　154　165
162　159　157　159　149　164　168　159　153

列出样本的频率分布表；绘出频率分布直方图.

【解】第一步，求极差：上述 60 个数据中最大为 169，最小为 146.

故极差为：169 − 146 = 23cm.

第二步，确定组距和组数，可取组距为 3cm，则组数为 $\frac{23}{3}=7\frac{2}{3}$，可将全部数据分为 8 组.

第三步，分组：[145.5，148.5)，[148.5，151.5)，[151.5，154.5)，[154.5，157.5)，[157.5，

160.5），[160.5，163.5），[163.5，166.5），[166.5，169.5）.

第四步，列频率分布表. 如表 10-8-2 所示：

表 10-8-2

分组	频数	频率
[145.5，148.5）	1	0.017
[148.5，151.5）	3	0.050
[151.5，154.5）	6	0.100
[154.5，157.5）	8	0.133
[157.5，160.5）	18	0.300
[160.5，163.5）	11	0.183
[163.5，166.5）	10	0.167
[166.5，169.5）	3	0.050
合计	60	1.000

第五步，根据上述数据绘制频率分布直方图. 如图 10-8-2 所示.

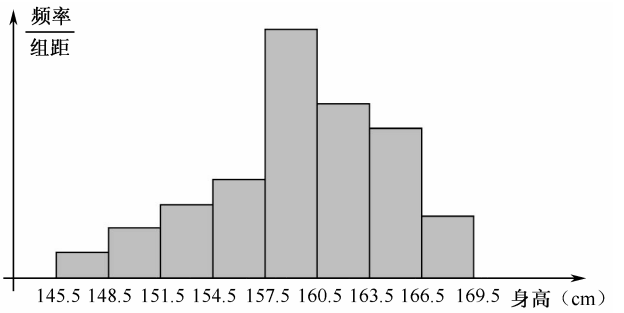


图 10-8-2

【巩固提高】

一、强化训练

1．容量为 100 的样本数据，按从小到大的顺序分为 8 组，如表 10-8-3 所示：

表 10-8-3

组号	1	2	3	4	5	6	7	8
频数	10	13	x	14	15	13	12	9

第三组的频数和频率分别是 （　　）

A．14 和 0.14　　B．0.14 和 14　　C．$\frac{1}{14}$ 和 0.14　　D．$\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{14}$

2. 我国西部一个地区的年降水量在下列区间内的概率如表 10-8-4 所示：

表 10-8-4

年降水量（mm）	[100，150）	[150，200）	[200，250）	[250，300]
概率	0.21	0.16	0.13	0.12

则年降水量在[200，300]（mm）范围内的概率是_____.

3. 2000 辆汽车通过某一段公路的时速的频率分布直方图如图 10-8-3 所示，时速在$[50, 60)$的汽车大约有　　（　　）

A．30 辆　　B．60 辆　　C．300 辆　　D．600 辆

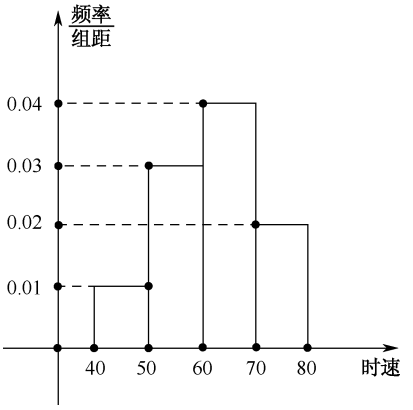


图 10-8-3

4. 从参加环保知识竞赛的学生中抽出 60 名，将其成绩（均为整数）整理后画出的频率分布直方图如图 10-8-4 所示，观察图形，回答下列问题：

（1）79.5～89.5 这一组的频数、频率分别是多少？

（2）估计这次环保知识竞赛的及格率（60 分及以上为及格）.

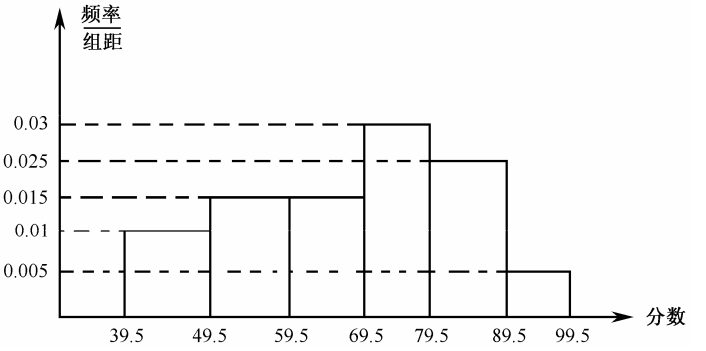


图 10-8-4

5. 为了了解初三学生女生身高情况，某中学对初三女生身高进行了一次测量（单位：cm），所得数据整理后列出的频率分布表如表 10-8-5 所示.

表 10-8-5

组　别	频数	频率
145.5～149.5	1	0.02
149.5～153.5	4	0.08
153.5～157.5	20	0.40
157.5～161.5	15	0.30

续表

组　别	频数	频率
161.5～165.5	8	0.16
165.5～169.5	*m*	*n*
合　计	*M*	*N*

（1）求出表中 *m*，*n*，*M*，*N* 所表示的数分别是多少？

（2）画出频率分布直方图；

（3）全体女生中身高在哪组范围内的人数最多？

6. 表 10-8-6 给出了某校 500 名 12 岁男孩中用随机抽样得出的 120 人的身高（单位：cm）.

表 10-8-6

区间界限	［122，126）	［126，130）	［130，134）	［134，138）	［138，142）
人　数	5	8	10	22	33
区间界限	［142，146）	［146，150）	［150，154）	［154，158）	
人　数	11	6	5	20	

（1）列出样本频率分布表；

（2）画出频率分布直方图；

（3）估计身高小于 134cm 的人数占总人数的百分比.

二、能力拓展

7. 某工厂对一批产品进行了抽样检测. 如图 10-8-5 所示是根据抽样检测后的产品净重（单位：g）数据绘制的频率分布直方图，其中产品净重的范围是[96，106]，样本数据分组为[96，98），[98，100），[100，102），[102，104），[104，106]，已知样本中产品净重小于 100g 的个数是 36，则样本中净重大于或等于 98g 并且小于 104g 的产品的个数是　　（　　）

A. 90　　B. 75　　C. 60　　D. 45

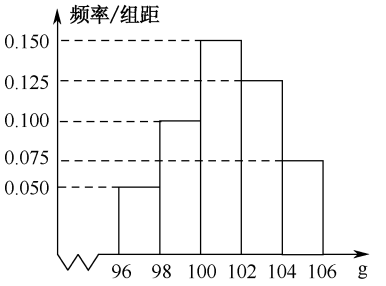


图 10-8-5

8. 为了了解高一学生的体能情况，某校抽取部分学生进行一分钟跳绳次数测试，将所得数据整理后，画出频率分布直方图（图 10-8-6），图中从左到右各小长方形面积之比为 2∶4∶17∶15∶9∶3，第二小组频数为 12.

（1）第二小组的频率是多少？样本容量是多少？

（2）若次数在 110 以上（含 110 次）为达标，试估计该学校全体高一学生的达标率是多少？

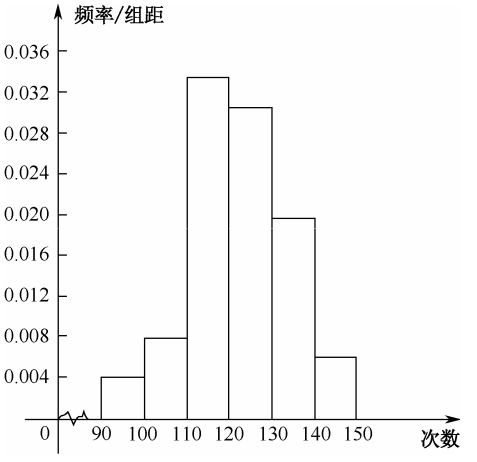


图 10-8-6

10.9　总体特征值估计

【学习目标】

1．知识目标：（1）正确理解样本数据平均数的意义和作用，学会计算数据的平均数；
（2）会用样本的基本数字特征——方差、标准差估计总体的基本数字特征.

2．能力目标：让学生经历数据处理的全过程，去感受数学知识与现实世界的联系.

【知识精要】

1. 平均数的计算

（1）如果有 n 个数据 x_1，x_2，…，x_n，那么 $\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 叫做这 n 个数据的平均数.

（2）如果在 n 个数据中，x_1 出现 f_1 次，x_2 出现 f_2 次，…，x_n 出现 f_n 次（$f_1+f_2+\cdots+f_n=n$），那么 $\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_nf_n}{n}$.

（3）若取值为 x_1，x_2，…，x_n 的频率分别为 p_1，p_2，…，p_n，则其平均数为 $x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$.

2. 方差的计算

若一组样本数据 x_1，x_2，…，x_n 的平均数为 $\bar{x}$，则称 $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ 为这个样本的方差，而 s 叫做样本的标准差.

注意 方差和标准差可用来刻画数据的稳定程度.

【基础过关】

1. 电池厂从某日生产的电池中抽取 10 个进行寿命测试，得到数据如下（单位：h）：30，35，25，25，30，34，26，25，29，21. 则该电池的平均寿命估计为_____.

2. 某班 40 人随机分为两组，第一组 18 人，平均成绩为 90；第二组 22 人，平均成绩为 80，则全班的平均成绩是_____.

3. 某校从甲、乙两名优秀选手中选拔 1 名参加全市中学生百米比赛，该校预先对这两名选手测试了 8 次，成绩如表 10-9-1 所示：

表 10-9-1

选手成绩（s）	1	2	3	4	5	6	7	8
甲	12.1	12.2	13	12.5	13.1	12.5	12.4	12.2
乙	12	12.4	12.8	13	12.2	12.8	12.3	12.5

根据成绩，请你作出判断，派哪位选手参加更好，为什么？

【典型例题】

例 10-9-1　甲、乙两名射击运动员参加某大型运动会的预选赛，他们分别射击了 5 次，成绩如表 10-9-2 所示（单位：环）.

表 10-9-2

甲	10	8	9	9	9
乙	10	10	7	9	9

如果甲、乙两人只有 1 人入选，则入选的应是谁？

【要点解析】判断谁入选，首先考虑选手的平均成绩，然后考虑成绩是否稳定. 因此分别求出他们的平均数和方差.

【解】甲的平均数为 $\bar{x}_1=\frac{1}{5}$（$10+8+9+9+9$）$=9$，

乙的平均数为 $\bar{x}_2=\frac{1}{5}$（$10+10+7+9+9$）$=9$，

甲的方差为 $s_{甲}^2=$（$10-9$）$^2\times\frac{1}{5}+$（$8-9$）$^2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$，

乙的方差为 $s_{乙}^2=$（$10-9$）$^2\times\frac{1}{5}\times2+$（$7-9$）$^2\times\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$.

$s_{甲}^2<s_{乙}^2$，说明乙的波动性大，故甲入选.

例 10-9-2　如果数据 a_1，a_2，…，a_n 的方差是 6，那么另一组数据 a_1-3，a_2-3，…，a_n-3 的方差是多少？

【解】设数据 a_1，a_2，…，a_n 的平均数为 $\bar{a}$，则数据 a_1-3，a_2-3，…，a_n-3 的平均数为 $\bar{a}-3$，

$$\therefore \text{方差 } s^2=\frac{1}{n}\{[(a_1-3)-(\bar{a}-3)]^2+[(a_2-3)-(\bar{a}-3)]^2+\cdots+[(a_n-3)-(\bar{a}-3)]^2\}$$

$$=\frac{1}{n}[(a_1-\bar{a})^2+(a_2-\bar{a})^2+\cdots+(a_n-\bar{a})^2]=6.$$

【巩固提高】

一、强化训练

1. 样本 a_1，a_2，a_3，…，a_{10} 的平均数为 $\bar{a}$，样本 b_1，b_2，b_3，…，b_{10} 的平均数为 $\bar{b}$，那么样本 a_1，b_1，a_2，b_2，a_3，b_3，…，a_{10}，b_{10} 的平均数为（　　）

A. $\bar{a}+\bar{b}$　　B. $\frac{1}{2}$（$\bar{a}+\bar{b}$）　　C. 2（$\bar{a}+\bar{b}$）　　D. $\frac{1}{10}$（$\bar{a}+\bar{b}$）

2. 一组数据的方差为 s^2，将这组数据中的每一个数都乘以 2，所得到的一组新数据的方差是（　　）

A. $\frac{1}{2}s^2$　　B. $2s^2$　　C. $4s^2$　　D. s^2

3. 某班有 48 名学生，在一次考试中统计出平均分为 70 分，方差为 75，后来发现有 2 名同学的成绩有误，甲实得 80 分却记为 50 分，乙实得 70 分却记为 100 分，更正后平均分和方差分别是 （　　）

A. 70，25　　B. 70，50　　C. 70，1.04　　D. 65，25

4．甲、乙两人在相同的条件下，射击 10 次，命中环数如下：

甲：8，6，9，5，10，7，4，8，9，5

乙：7，6，5，8，6，9，6，8，7，7

根据以上数据估计两人的技术稳定性.

5. 甲、乙两种冬小麦试验品种连续 5 年的平均单位面积产量如下（单位：t/km^2）：

品种	第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年
甲	9.8	9.9	10.1	10	10.2
乙	9.4	10.3	10.8	9.7	9.8

其中产品比较稳定的小麦品种是哪一种？

6. 甲、乙两台机床在相同的条件下同时生产一种零件，现在从中各抽测 10 个，它们的尺寸分别为（单位：mm）：

甲：10.2　10.1　10.9　8.9　9.9　10.3　9.7　10　9.9　10.1

乙：10.3　10.4　9.6　9.9　10.1　10　9.8　9.7　10.2　10

分别计算上面两个样本的平均数与方差，如果图纸上的设计尺寸为 10mm，从计算结果看，用哪台机床加工这种零件较合适？

二、能力拓展

7. 某农场为了从三种不同的西红柿品种中选取高产稳定的西红柿品种，分别在五块试验田上试种，每块试验田均为 0.5 公顷，产量情况如下：

品　种	产量（kg）				
	1	2	3	4	5
1	21.5	20.4	22.0	21.2	19.9
2	21.3	18.9	20.6	22.4	21.8
3	17.8	23.3	21.4	19.1	20.9

问：哪一品种的西红柿既高产又稳定？

10.10　一元线性回归

【学习目标】

1．知识目标：（1）了解变量之间的相关关系即回归关系的概念；
（2）会求简单回归关系的回归直线.
2．能力目标：会利用公式求相关系数；掌握求一元线性回归直线方程 $y=bx+a$ 的方法；加深理解线性回归模型的意义.

【知识精要】

1. 变量之间的关系

（1）确定性的关系：设有两个变量 x 和 y，变量 y 随变量 x 一起变化，并完全依赖于 x. 如：圆的面积 y 与半径 x 之间的关系 $y=\pi x^2$，即确定的半径得到确定的圆的面积.

（2）非确定性关系：当一个或几个相互联系的变量取一定数值时，与之相对应的另一变量的值虽然不确定，但它仍按某种规律在一定的范围内变化，如人的身高和体重存在着关系.

变量间的这种非确定关系，称为相关关系，或称为回归关系.

2. 回归分析

应用统计方式寻求一个数学公式描述变量间的相关关系所进行的统计分析，其中，只含有两个变量的叫一元线性回归.

3. 回归直线

用直线 $\hat{y}=bx+a$ 近似表示的相关关系叫线性关系，这条直线叫回归直线，其中 a，b 叫回归系数.

4. 求回归直线方程的步骤

第一步　列表 x_i，y_i，x_iy_i；

第二步　计算 $\bar{x}$，$\bar{y}$，$\sum_{i=1}^{n}x_i^2$，$\sum_{i=1}^{n}y_i^2$，$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$；

第三步　代入公式计算 b，a 的值；

第四步　写出直线方程.

【基础过关】

1. 下列两变量中具有相关关系的是（　　）

A. 正方体的体积与边长　　B. 匀速行驶的车辆的行驶距离与时间

C. 人的身高与体重　　D. 人的身高与视力

2. 下列各关系中，不属于相关关系的是（　　）

A. 名师出高徒　　B. 球的表面积与体积

C. 家庭的支出与收入　　D. 人的年龄与体重

3．一位母亲记录了她儿子 3 到 9 岁的身高，数据如表 10-10-1 所示：

表 10-10-1

年龄（岁）	3	4	5	6	7	8	9
身高（cm）	94.8	104.2	108.7	117.8	124.3	130.8	139.0

由此她用最小二乘法求出了身高 y 与年龄 x 的回归直线方程 $y=73.93+7.19x$，并预测儿子 10 岁时的身高，则下列的叙述正确的是（　　）

A. 儿子 10 岁时的身高一定是 145.83cm　　B. 儿子 10 岁时的身高在 145.83cm 以上

C. 儿子 10 岁时的身高在 145.83cm 左右　　D. 儿子 10 岁时的身高在 145.83cm 以下

【典型例题】

例 10-10-1　测得美国某地 10 对父子身高（单位：英寸）如表 10-10-2 所示：

表 10-10-2

父亲身高（x）	60	62	64	65	66	67	68	70	72	74
儿子身高（y）	63.6	65.2	66	65.5	66.9	67.1	67.4	68.3	70.1	70

如果 x 与 y 之间具有线性相关关系，求回归直线方程；如果父亲的身高为 78 英寸，试估计儿子的身高（保留小数点后两位）.

【解】先将两个变量的数字在表中计算出来，如表 10-10-3 所示：

表 10-10-3

序号	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
1	60	63.6	3600	4044.96	3816
2	62	65.2	3844	4251.04	4042.4
3	64	66	4096	4356	4224
4	65	65.5	4225	4290.25	4257.5
5	66	66.9	4356	4475.61	4415.4
6	67	67.1	4489	4502.41	4495.7
7	68	67.4	4624	4542.76	4583.2
8	70	68.3	4900	4664.89	4781
9	72	70.1	5184	4914.01	5047.2
10	74	70	5476	4900	5180
Σ	668	670.1	44794	44941.93	44842.4

由上表可得 $\bar{x}=\dfrac{668}{10}=66.8$，$\bar{y}=\dfrac{670.1}{10}=67.01$，$\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2=44794$，$\sum\limits_{i=1}^{10}y_i^2=44941.93$，$\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i=44842.4$.

代入公式得 $b=\dfrac{44842.4-10\times66.8\times67.01}{44794-10\times66.8^2}\approx0.4646$，

$a=67.01-04646\times66.8\approx35.975$，

故所求回归直线方程为 $\hat{y}=0.4646x+35.945$.

当 $x=78$ 时，$\hat{y}=0.4646\times78+35.975=72.2138\approx72.21$，

所以当父亲的身高为 78 英寸时，估计儿子的身高约为 72.21 英寸.

例 10-10-2　某机构曾研究温度对某种细菌的影响，在一定温度下，经 x 单位时间，细菌的数量指数为 y，数据如下：

（1，2）（2，5）（3，10）（4，17）（5，26）（6，37）（7，50）（8，65）（9，82）（10，101）

问：关于这两个变量的关系，你能得出什么结论？

【解】观察可以发现 $2=1^2+1$，$5=2^2+1$，$10=3^2+1$，$17=4^2+1$，$26=5^2+1$，…，因此，我们可以认为 x 与 y 之间的关系是 $y=x^2+1$，并非是线性相关关系.

【巩固提高】

一、强化训练

1．散点图的作用　　（　　）

A．查找个体个数　　B．比较个体数据大小关系

C．探究个体分类　　D．粗略判断变量是否具有相关关系

2．工人工资 x（元）依劳动生产率 y（千元）变化的回归方程为 $\hat{y}=50+80x$，下列判断正确的是　　（　　）

A．劳动生产率为 1000 元时，工资为 130 元

B．劳动生产率提高 1000 元时，工资提高 80 元

C．劳动生产率提高 1000 元时，工资提高 130 元

D．当月工资 250 元时，劳动生产率为 2000 元

3. 下列命题：

① 任何两个变量都具有相关关系；

② 圆的周长与该圆的半径具有相关关系；

③ 某商品的需求与该商品的价格是一种非确定性关系；

④ 根据散点图求得的回归直线方程可能是没有意义的；

⑤ 两个变量间的相关关系可以通过回归直线，把非确定性问题转化为确定性问题进行研究.

其中正确的命题为 （　　）

A．①③④　　B．②④⑤　　C．③④⑤　　D．②③⑤

4．给出施化肥量对水稻产量影响的试验数据：

施化肥量 x	15	20	25	30	35	40	45
水稻产量 y	330	345	365	405	445	450	455

试求出回归直线方程.

5．在某种产品表面进行腐蚀刻线试验，得到腐蚀深度 y 与腐蚀时间 x 之间相应的一组观察值如下表所示：

x	5	10	15	20	30	40	50	60	70	90	120
y	6	10	10	13	16	17	19	23	25	29	467

求腐蚀深度 y 对腐蚀时间 x 的回归直线方程，并解释回归系数的意义.

6．为分析初中升学的数学成绩对高一学生学习情况的影响，在高一年级学生中随机抽取了 10 名学生，他们的入学成绩与期末考试成绩如下表所示：

学生编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
入学成绩 x	63	67	45	88	81	71	52	99	58	76
期末成绩 y	65	78	52	82	92	89	73	98	56	75

（1）若变量 x 与 y 之间具有线性相关关系，求出回归直线的方程；

（2）若某学生的入学成绩为 80 分，试估计他的期末成绩.

二、能力拓展

7. 有一台机床可以按各种不同的速度运转，其加工的零件有一些是二级品，每小时生产的二级品零件的数量随机床运转的速度而变化. 下面是实验的步骤：

机床运转的速度（转/秒）	每小时生产二级品的数量（个）
8	5
12	8
14	9
16	11

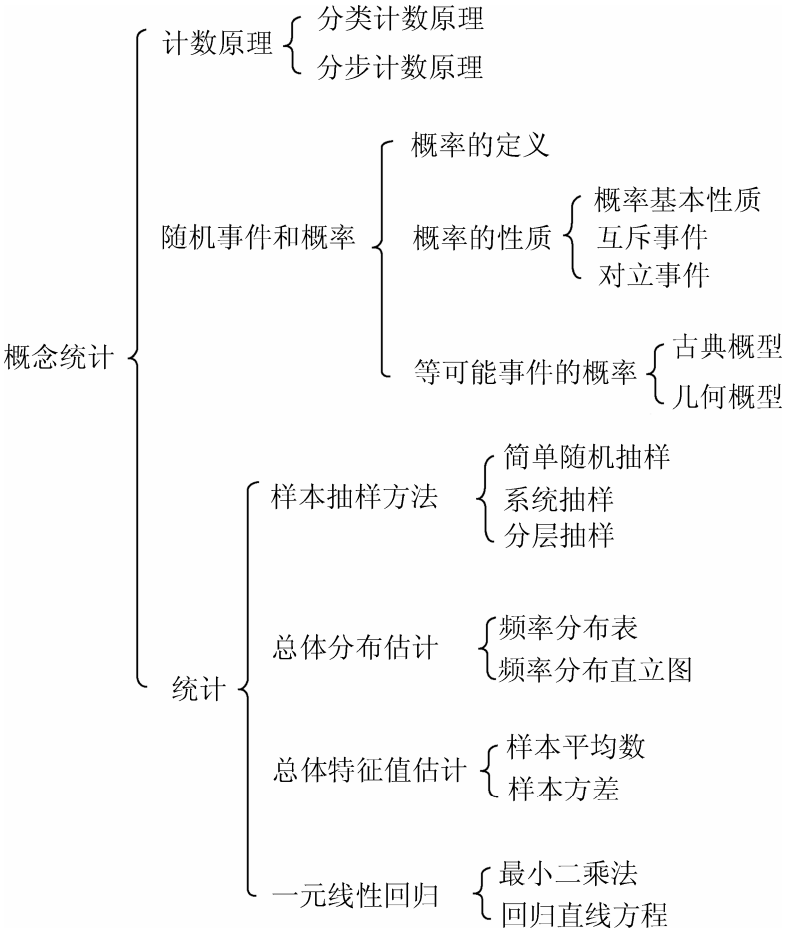
（1）作出散点图；

（2）求出机床运转的速度与每小时生产二级品数量的回归直线方程；

（3）若实际生产中所允许的二级品不超过 10 个，那么机床的运转速度不得超过多少转/秒？

本章小结与复习

【知识结构】



【考纲解读】

概率统计起源于现实生活，应用于现实生活. 概率统计内容的设置，除了让学生学习一些最基本的统计分析方法，重要的是要让学生体会统计的作用和基本思想；目的是发展学生的应用意识，使其体会数学在实际中的应用价值，同时更全面地培养学生分析问题、解决问题的能力，提高学生的数据处理能力. 在单招考试中，概率统计的分数一般在 15 分左右，在新考纲中提高了统计部分的要求，在今后的教学中应引起重视.

考　点	要　求
计数原理	理　解
随机事件和概率	理　解

续表

考　点	要　求
概率的简单性质	理　解
等可能事件的概率	理　解
总体、样本和抽样方法	了　解
总体分布估计	理　解
总体特征值估计	了　解
一元线性回归	了　解

【考题剖析】

例 10-1　（2010 年单招试题）已知数据 a_1，a_2，a_3 的方差为 2，则数据 $2a_1$，$2a_2$，$2a_3$ 的方差为　　（　　）

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 10

【剖析】本题考查了方差的计算公式.

【解】因为数据 a_1，a_2，a_3 的方差为 2，所以 $\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}(a_i-\bar{x})^2=2$,

于是 $\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}(2a_i-2\bar{x})^2=8$, 所以选 C.

例 10-2　（2011 年单招试题）一工厂生产某种产品 240 件，它们来自甲、乙、丙三条生产线. 为检查这批产品的质量，决定采用分层抽样的方法进行抽样，已知从甲、乙、丙三条生产线抽取的个体数组成一个等差数列，则乙生产线生产的产品件数为　　（　　）

A. 40　　B. 80　　C. 120　　D. 160

【剖析】本题考查了分层抽样的概念及如何计算各层的个体的个数.

【解】因为甲、乙、丙三条生产线抽取的个体数组成一个等差数列，所以甲、乙、丙三条生产线的产品数目也成等差数列，乙生产线生产的产品件数为 80，选 B.

例 10-3　（2012 年单招试题）设甲将一颗骰子抛掷一次，所得向上的点数为 a，则方程 $x^2+ax+1=0$ 有两个不相等实根的概率为　　（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{5}{12}$

【剖析】本题着重考查了古典概型的计算.

【解】因为方程 $x^2+ax+1=0$ 有两个不相等实根，

所以 $\Delta=a^2-4>0$，$a<-2$或$a>2$，a可以取3，4，5，6

所以概率为 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，选 A.

【巩固训练】

一、强化训练

1. 下列说法正确的是　　（　　）

A. 任何事件的概率总是在（0，1）之间

B. 频率是客观存在的，与试验次数无关

C. 随着试验次数的增加，频率一般会越来越接近概率

D. 概率是随机的，在试验前不能确定

2. 掷一枚骰子，则掷得奇数点的概率是 （ ）

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

3. 抛掷一枚质地均匀的硬币，如果连续抛掷 1000 次，那么第 999 次出现正面朝上的概率是 （ ）

A. $\frac{1}{999}$ B. $\frac{1}{1000}$ C. $\frac{999}{1000}$ D. $\frac{1}{2}$

4. 从一批产品中取出三件产品，设 A =“三件产品全不是次品”，B =“三件产品全是次品”，C =“三件产品不全是次品”，则下列结论正确的是 （ ）

A. A 与 C 互斥 B. B 与 C 互斥 C. 任何两个均互斥 D. 任何两个均不互斥

5. 甲、乙二人下棋，甲获胜的概率是 30%，两人下成和棋的概率为 50%，则甲不输的概率是 （ ）

A. 30% B. 20% C. 80% D. 以上都不对

6. 有 100 张卡片（从 1 号至 100 号），从中任取一张，计算：（1）取到卡号是 7 的倍数的有多少种？（2）取到卡号是 7 的倍数的概率;（3）取到卡号是 7 的倍数或者是 5 的倍数的概率.

二、能力拓展

7. 如图 10-1 所示，在墙上挂着一块边长为 16cm 的正方形木板，上面画了小、中、大三个同心圆，半径分别为 2cm，4cm，6cm，某人站在 3m 之外向此板投镖，设投镖击中线上或没有投中木板时都不算（可重投）. 问：

（1）投中大圆内的概率是多少？

（2）投中小圆与中圆形成的圆环的概率是多少？

（3）投中大圆之外的概率是多少？

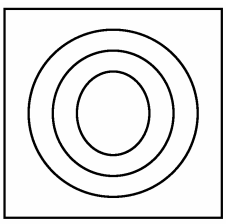


图 10-1

8. 有一个容量为 100 的样本，数据的分组及各组的频数如下：

[12.5，15.5)，6；[15.5，18.5)，16；[18.5，21.5)，18；[21.5，24.5)，22；[24.5，27.5)，20；[27.5，30.5)，10；[30.5，33.5)，8.

（1）列出样本的频率分布表；

（2）画出频率分布直方图；

（3）估计数据小于 30.5 的概率.

“课课通”普通高校对口升学系列学习指导丛书

课课通数学（第二册）

测 试 卷

主　编　崔永红　狄昌进

副主编　戴伟明　叶开进　吴凤妹

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京・BEIJING

目　录



第 6 章　数列　阶段测试卷……1
第 7 章　平面向量　阶段测试卷……5
第 8 章　直线与圆的方程　阶段测试卷……9
第 9 章　立体几何　阶段测试卷……13
第 10 章　概率统计　阶段测试卷……19
高一年级下学期期中测试卷……25
高一年级下学期期末测试卷……29
测试卷参考答案……35
习题参考答案……49

第 6 章　数列　阶段测试卷

时间：120 分钟　　总分：150 分

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．下列每小题中，只有一个正确答案）

1. 数列 $-1, \frac{8}{5}, -\frac{15}{7}, \frac{24}{9}, \cdots$ 的一个通项公式是　　（　　）

A．$a_n=(-1)^n\frac{n^3+n}{2n+1}$　　B．$a_n=(-1)^n\frac{n(n+3)}{2n+1}$

C．$a_n=(-1)^n\frac{(n+1)^2-1}{2n-1}$　　D．$a_n=(-1)^n\frac{n(n+2)}{2n+1}$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=n^2-3n-4(n\in\mathbf{N}^*)$，则 a_4 等于　　（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．0

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=\frac{1}{2}$，$a_2+a_4+\cdots+a_{100}=80$，则 $S_{100}=$　　（　　）

A．80　　B．120　　C．135　　D．160

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_2+a_5+a_9+a_{12}=60$，那么 $S_{13}=$　　（　　）

A．390　　B．195　　C．180　　D．120

5. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $S_m=30$，$S_{2m}=100$，则 $S_{3m}=$　　（　　）

A．130　　B．170　　C．210　　D．260

6. 一个等差数列前 3 项和为 34，后 3 项和为 146，所有项和为 390，则这个数列的项数为　　（　　）

A．13　　B．12　　C．11　　D．10

7. 已知 1，a^2，9，…，成等比数列，则该等比数列的公比为　　（　　）

A．3 或 −3　　B．3 或 $\frac{1}{3}$　　C．3　　D．$\frac{1}{3}$

8. 如果 −1，a，b，c，−9 成等比数列，那么　　（　　）

A．$b=3$，$ac=9$　　B．$b=-3$，$ac=9$

C．$b=3$，$ac=-9$　　D．$b=-3$，$ac=-9$

9. 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1，项数是偶数，所有奇数项之和为 85，所有偶数项之和为 170，则这个等比数列的项数为　　（　　）

A．5　　B．6　　C．8　　D．13

10. 若 a，b，c 成等比数列，则关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$　　（　　）

A．必有两个不等实根　　B．必有两个相等实根

C．必无实根　　D．以上三种情况均有可能

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11. 数列 1，2，4，…的前 10 项的和为_____.

12. 等差数列$\{a_n\}$中，若$S_n=3n^2+2n$，则公差$d=$_____.

13. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差是正整数，且$a_3a_7=-12$，$a_4+a_6=-4$，则$S_{10}=$_____.

14. 等差数列$\{a_n\}$的第 3，7，10 项成等比数列，则这个等比数列的公比 $q=$ _____.

15. 在等比数列$\{a_n\}$中，已知 $a_n>0$，$a_1a_3a_5=8$，则数列$\{a_n\}$的前 5 项积为_____.

三、解答题（本大题共 8 小题，共 90 分）

16.（8 分）在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=\frac{1}{3}$，$a_2+a_5=4$，$a_n=33$，试求 n 的值.

17.（8 分）在等差数列$\{a_n\}$中，$a_4=0.8$，$a_{11}=2.2$，求$a_{51}+a_{52}+\cdots+a_{80}$.

18.（10 分）在等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_3=2$，$a_2+a_4=\frac{20}{3}$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

19.（10 分）有四个数，其中前三个数成等比数列，其积为 216，后三个数成等差数列，其和为 36，求这四个数.

20.（12 分）设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_3=5$，$S_{15}=225$，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，$b_3=a_2+a_3$，$b_2b_5=128$. 求：

（1）数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 及数列 $\{b_n\}$ 的前 8 项的和 T_8；

（2）使得 $\dfrac{1}{a_n-7}>\dfrac{1}{4}$ 成立的正整数 n.

21.（14 分）设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n，且 $S_4=-62$，$S_6=-75$，求：

（1）数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 及前 n 项的和 S_n；

（2）$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{14}|$.

22.（14 分）数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n，已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=2S_n+1(n\geqslant 1)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）等差数列 $\{b_n\}$ 的各项为正，其前 n 项和为 T_n，且 $T_3=15$，又 a_1+b_1，a_2+b_2，a_3+b_3 成等比数列，求 T_n.

23.（14 分）某渔业公司年初用 98 万元购买一艘捕鱼船，第一年各种费用 12 万元，以后每年都增加 4 万元，每年捕鱼收益 50 万元.

（Ⅰ）问第几年开始获利？

（Ⅱ）若干年后，有两种处理方案：

甲方案：年平均获利最大时，以 26 万元出售该渔船；

乙方案：总纯收入获利最大时，以 8 万元出售该渔船.

问哪种方案合算.

第 7 章　平面向量　阶段测试卷

时间：120 分钟　　总分：150 分

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．下列每小题中，只有一个正确答案）

1．已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为两个单位向量，下列四个命题中正确的是（　　）

A．$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相等　　B．如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行，那么 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相等

C．$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$　　D．$\vec{a}^2=\vec{b}^2$

2．若向量 $\vec{a}=(1,1)$，$\vec{b}=(1,-1)$，$\vec{c}=(-1,2)$，则 $\vec{c}=$（　　）

A．$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$　　B．$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$

C．$-\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$　　D．$-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

3．$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=$（　　）

A．$2\overrightarrow{BC}$　　B．$2\overrightarrow{CB}$　　C．$\vec{0}$　　D．0

4．已知 $\vec{a}=(\lambda,2)$，$\vec{b}=(-3,5)$ 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角，则 λ 的取值范围是（　　）

A．$\lambda>\frac{10}{3}$　　B．$\lambda\geqslant\frac{10}{3}$　　C．$\lambda<\frac{10}{3}$　　D．$\lambda\leqslant\frac{10}{3}$

5．若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-4$，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=2\sqrt{2}$，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 θ 是（　　）

A．0°　　B．90°　　C．180°　　D．270°

6．已知两点 $A(4,1)$，$B(7,-3)$，则与向量 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量是（　　）

A．$(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$　　B．$(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$　　C．$(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$　　D．$(\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$

7．若向量 $\vec{a}=(-2,x)$ 与 $\vec{b}=(-x,1)$ 平行且方向相反，则 $x=$（　　）

A．0　　B．$\pm\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$-\sqrt{2}$

8．设向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(4,t)$，向量 $2\vec{a}+\vec{b}$ 与 $2\vec{a}-\vec{b}$ 垂直，则 t 等于（　　）

A．2　　B．−2　　C．2 或 −2　　D．以上都不正确

9. 已知 $A(1,2)$，$B(2,3)$，$C(-2,5)$，则 $\triangle ABC$ 为（　　）

A. 直角三角形　　B. 锐角三角形　　C. 钝角三角形　　D. 不等边三角形

10．若 $A(x,-1)$，$B(1,3)$，$C(2,5)$ 三点共线，则 $x=$（　　）

A．-3　　B．-1　　C．1　　D．3

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11．若 $A(2,5)$，$B(5,x)$，且 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{10}$，则 $x=$_____.

12．在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 为直角，$|\overrightarrow{AC}|=1$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=$_____.

13．已知向量 $\overrightarrow{OA}=(-1,2)$，$\overrightarrow{OB}=(3,m)$，若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$，则 $m=$_____.

14．已知向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为120°，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$，则$|\vec{b}|=$_____.

15．在平行四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AC}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{BD}=(-3,\ 2)$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$_____.

三、解答题（本大题 8 小题，共 90 分）

16．（10 分）已知点$A(-1,\ -5)$和向量$\vec{a}=(2,\ 3)$，若$\overrightarrow{AB}=3\vec{a}$，求点$B$的坐标.

17．（10 分）已知$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(-3,\ 2)$，当k取何值时，$k\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}-3\vec{b}$平行？方向如何？

18．（10 分）设向量$\vec{a}=(3,\ 4)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$，$\vec{c}=(3,\ -1)$. 求：（1）$|\vec{a}+\vec{b}|$；（2）$\vec{a}\cdot(\vec{b}+3\vec{c})$.

19．（10 分）已知向量$\vec{a}=(\sin x,\ 1)$，$\vec{b}=\left(\cos x,\ -\frac{1}{2}\right)$，当$\vec{a}\perp\vec{b}$时，求$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$的值.

20.（12 分）已知$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=7$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为60°．求：(1)$\vec{a}\cdot\vec{b}$；(2)$|\vec{a}-\vec{b}|$；(3)$\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{b}$夹角的余弦.

21.（12 分）已知点$A(3,\ 0)$，$B(0,\ 3)$，$C(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$.

（1）若$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$，求$\tan\alpha$的值；

（2）若$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=-1$，求$\dfrac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\tan\alpha}$的值.

22.（12 分）已知$A(2,\ 0)$，$B(0,\ 2)$，$C(\cos\theta,\ \sin\theta)$

（1）若$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，求$2\sin\theta\cos\theta$的值；

（2）设O是坐标原点，若$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}|=\sqrt{7}$，且$\theta\in(0,\ \pi)$，求$\overrightarrow{OB}$和$\overrightarrow{OC}$的夹角.

23.（14 分）已知平面向量 $\vec{a}=(\sqrt{3},\ -1)$，$\vec{b}=(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})$.

（1）求证：$\vec{a}\perp\vec{b}$；

（2）若存在不全为 0 的实数 x 和 y，使向量 $\vec{a}+(x-3)\vec{b}$ 与向量 $-y\vec{a}+x\vec{b}$ 垂直，试求函数关系式 $y=f(x)$；

（3）求函数 $y=f(x)$ 的最值.

第 8 章　直线与圆的方程　阶段测试卷

时间：120 分钟　　总分：150 分

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．下列每小题中，只有一个正确答案）

1. 直线 $x+\sqrt{3}y-7=0$ 的倾斜角是　　（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

2. 过点 $(-3,\ 1)$ 且与直线 $x-2y-6=0$ 平行的直线方程是　　（　　）

A. $x-2y-5=0$　　B. $x-2y+5=0$

C. $2x+y+5=0$　　D. $x+2y+1=0$

3. 直线 $x+y=2r$ 与圆 $x^2+y^2=r^2$ 的位置关系是　　（　　）

A. 相交　　B. 相切　　C. 相离　　D. 相交或相切

4. 以 $A(1,\ -3)$，$B(-5,\ 1)$ 为端点的线段的垂直平分线方程是　　（　　）

A. $3x-2y+4=0$　　B. $3x-2y-9=0$

C. $2x+3y+7=0$　　D. $3x+2y+8=0$

5. 从点 $P(2,\ 1)$ 引圆 $(x+1)^2+(y-1)^2=5$ 的切线，则切线长是　　（　　）

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

6. 两点 $A(a+2,\ b+2)$ 和 $B(b-a,\ -b)$ 关于直线 $4x+3y=11$ 对称，则 a，b 的值为（　　）

A. $a=-4,\ b=2$　　B. $a=4,\ b=-2$　　C. $a=2,\ b=4$　　D. $a=4,\ b=2$

7. 已知圆 C：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，则 $D=F=0$ 且 $E<0$ 是圆 C 与 x 轴相切于坐标原点的　　（　　）

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分又非必要条件

8. 以 $P(-5,\ 2)$ 为圆心的圆与直线 l：$x+y+5=0$ 相离，那么圆 P 的半径 r 的取值范围是　　（　　）

A．$0<r<2$　　B．$0<r<\sqrt{2}$　　C．$0<r<2\sqrt{2}$　　D．$0<r<\frac{\sqrt{2}}{2}$

9. 圆 $x^2+y^2-4x-4y-1=0$ 上的点到直线 $x-y=2$ 的距离的最大值是　　（　　）

A．$3-\sqrt{2}$　　B．$3+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$3+\sqrt{2}$　　D．$3+2\sqrt{2}$

10. 直线 $y=kx+3$ 与圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 相交于 M、N 两点，若 $|MN|\geqslant 2\sqrt{3}$，则 k 的取值范围是　　（　　）

A．$[-\frac{3}{4},\ 0]$　　B．$[-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}]$　　C．$[-\sqrt{3},\ \sqrt{3}]$　　D．$[-\frac{2}{3},\ 0]$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11. 过点 $A(3,\ 2)$ 且与原点距离最大的直线方程是_____.

12. 已知直线 l_1：$x-y\sin\theta-1=0$，l_2：$2x\sin\theta-y+1=0$，若 $l_1 /\!/ l_2$，且 $\theta\in[0,\ \pi)$，则 $\theta=$_____.

13. 已知直线 $5x+12y+a=0$ 与圆 $x^2+y^2-2y=0$ 相切，则 a 的值为_____.

14. 直线 $2x-y+5=0$ 与圆 $x^2+y^2=9$ 相交于 A、B 两点，则 $|AB|=$_____.

15. 斜率为 1 的直线 l 被圆 $x^2+y^2=4$ 截得的弦长为 2，则直线 l 的方程为_____.

三、解答题（本大题共 8 小题，共 90 分）

16.（10 分）求经过直线 l_1：$3x+4y-5=0$，l_2：$2x-3y+8=0$ 的交点 M，且满足下列条件的直线方程：（1）与直线 $3x+y+5=0$ 平行；（2）与直线 $3x+y+5=0$ 垂直.

17.（10 分）已知平行四边形 $ABCD$ 的顶点 $A(4,\ 8)$，$B(0,\ 4)$，$D(8,\ 0)$.

（1）求点 C 的坐标；

（2）若直线 l 的倾斜角为 30°，且将平行四边形 $ABCD$ 的面积平分，求直线 l 的方程.

18.（10 分）求过两点 $M(1,\ 4)$、$N(3,\ 2)$ 且圆心在直线 $y=0$ 上的圆的标准方程，并判断点 $P(-4,\ 4)$ 与圆的位置关系.

19.（12 分）求直线 l_1：$y=2x+3$ 关于直线 l：$y=x+1$ 对称的直线 l_2 的方程.

20.（12 分）求经过点 $A(-2,-4)$，且与直线 l：$x+3y-26=0$ 相切于点 $B(8,6)$ 的圆的方程.

21.（12 分）已知圆 C：$(x-2)^2+(y-3)^2=4$，直线 l：$(m+2)x+(2m+1)y=7m+8$.

（1）证明：不论 m 为何值，直线 l 与圆 C 恒相交；

（2）当直线 l 被圆 C 截得的弦长最短时，求 m 的值.

22.（12 分）已知圆 C：$(x-a)^2+(y-2)^2=4\ (a>0)$ 及直线 l：$x-y+3=0$. 当直线 l 被圆 C 截得的弦长为 $2\sqrt{2}$ 时，求：

（1）a 的值；

（2）求过点（3，5）并与圆 C 相切的切线方程.

23.（12 分）有一种大型商品，A、B 两地都有出售，且价格相同，某地居民从两地之一购得商品后，运回的费用是：每单位距离 A 地的运费是 B 地的运费的 3 倍，已知 A、B 两地距离 10 千米，顾客选 A 或 B 地购买这种商品的标准是：包括运费和价格的总费用较低，求 A、B 两地的售货区域的分界线的曲线形状.

第 9 章　立体几何　阶段测试卷

时间：120 分钟　　总分：150 分

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．下列每小题中，只有一个正确答案）

1. 若三个平面两两相交，则（　　）

A. 必交于一点　　B. 不可能恰有两条交线

C. 必交于一条直线　　D. 必两两相交于三条平行直线

2. 下列命题中正确的是（　　）

A. 垂直于同一平面的两个平面平行

B. 两条平行直线在同一平面内的射影互相平行

C. 垂直于同一平面内的两条直线的直线与此平面垂直

D. 若四点不共面，则任何三点不共线

3. 若 a、b、c 为三条不同直线，M、N、P 为三个不同平面，则下列命题中错误的是（　　）

A. $a \parallel b$，$b \perp c$，则 $a \perp c$　　B. $M \parallel N$，$N \perp P$，则 $M \perp P$

C. $a \perp M$，$M \parallel N$，则 $a \perp N$　　D. $a \perp M$，$M \perp N$，则 $a \parallel N$

4. 对于直线 m、n 和平面 α、β，$\alpha \perp \beta$ 的一个充分条件是（　　）

A. $m \perp n$，$m \parallel \alpha$，$m \parallel \beta$　　B. $m \perp n$，$\alpha \cap \beta = m$，$n \subset \alpha$

C. $m \parallel n$，$m \subset \alpha$，$n \perp \beta$　　D. $m \parallel n$，$m \perp \alpha$，$n \perp \beta$

5．空间四边形 $ABCD$ 中，E、F 分别是 AB、CD 的中点，若 $AD = BC$，AD、BC 成 60°，则异面直线 EF、BC 所成角大小为（　　）

A. 30°　　B. 60°　　C. 30° 或 60°　　D. 90°

6. PA、PB、PC 是从 P 引出的三条射线，每两条的夹角都是 60°，则直线 PC 与平面 PAB 所成角的余弦值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7．圆锥的轴截面是等边三角形，那么它的侧面展开图扇形的圆心角是（　　）

A. 60°　　B. 90°　　C. 180°　　D. 270°

8. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC = 5$，$BC = 6$，$PA \perp$ 平面 ABC，$PA = 8$，则点 P 到直线 BC 的距离为（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. $3\sqrt{5}$　　D. $4\sqrt{5}$

9. 若长方体的三个面的面积分别为 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{6}$，则长方体的体对角线长为（　　）

A. $2\sqrt{3}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $\sqrt{3}$

10．一山坡，倾斜角为 30°，若一个人在斜坡平面上沿着一条与斜坡底线成 45° 角的直线前进 1000m，则这个人升高了（　　）

A. $250\sqrt{2}$m　　B. $250\sqrt{3}$m　　C. $250\sqrt{6}$m　　D. 500m

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11．在空间四边形 $ABCD$ 中，如果 $AB \perp CD$，$BC \perp AD$，那么对角线 AC 与 BD 的位置关系是_____.

12．若 $a \parallel b$，$c \perp a$，$d \perp b$，则 c 与 d 的关系为_____.

13．棱锥的底面面积是 $64\,\text{cm}^2$，截面平行于底面且距底面距离是棱锥高的 $\frac{1}{4}$，则截面面积是_____.

14. 已知平面 $\alpha \parallel \beta$，且 α、β 间的距离为 1，直线 l 与 α、β 成 60° 的角，则夹在 α、β 之间的线段长为_____.

15. 圆锥底面半径为 r，母线长为 $3r$，底面圆周上一质点沿圆锥侧面运动一周后，又回到原出发点，这质点运动的最短路程是_____.

三、解答题（本大题 8 小题，共 90 分）

16.（10 分）一圆锥的底面半径为 6cm，一个平行于底面的截面半径为 3cm，夹在底面与截面之间的母线长是 5cm，求圆锥的高、侧面积和体积.

17.（8 分）如图 9-1 所示，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 AA_1 的中点，求证：$A_1C \parallel$ 平面 BDE.

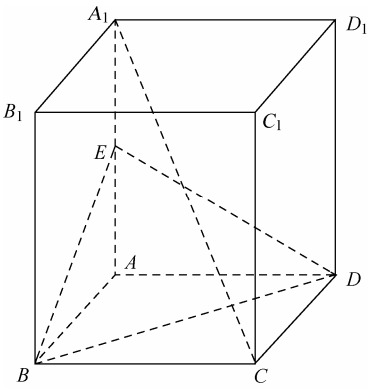


图 9-1

18.（10 分）在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC=CD$，$\angle B=90^{\circ}$，$\angle C=135^{\circ}$，沿对角线 AC 将此四边形折成直二面角. 求证：$AB\perp$ 平面 BCD.

19.（12 分）如图 9-2 所示，已知线段 PA 垂直于正方形 $ABCD$ 所在平面，且 $PA=a$，$AB=a$，求：（1）点 P 到直线 BC 的距离；（2）异面直线 PC 与 BD 所成的角.

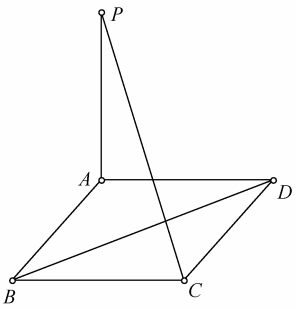


图 9-2

20.（12 分）三棱锥 $P-ABC$ 中，$PC=x$，其余棱长均为 1.

（1）求证：$PC \perp AB$；

（2）求三棱锥 $P-ABC$ 的体积的最大值.

21.（10 分）如图 9-3 所示，已知四边形 $ABCD$ 是空间四边形，E、F、G、H 分别是边 AB、BC、CD、DA 的中点.

（1）求证：$EFGH$ 是平行四边形；

（2）若 $BD=2\sqrt{3}$，$AC=2$，$EG=2$，求异面直线 AC、BD 所成的角和 EG、BD 所成的角.

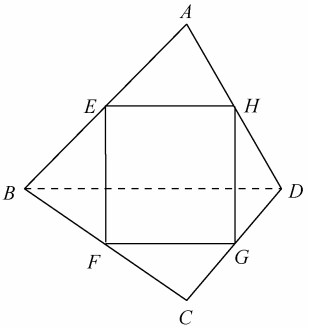


图 9-3

22.（14 分）如图 9-4 所示，矩形 $ABCD$ 中，$AB=3\sqrt{3}$，$BC=3$，沿对角线 BD 将 $\triangle BCD$ 折起，使点 C 移到点 C'，且 C' 在平面 ABD 上的射影 O 恰好在 AB 上.

（1）求证：$AC'\perp BC'$；

（2）求直线 AB 与平面 BDC' 所成角的正弦值.

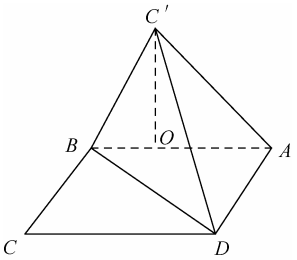


图 9-4

23.（14 分）如图 9-5 所示，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$\angle DAB=60^\circ$，且 E 为 CC_1 的中点，$AB=2$，$BB_1=2\sqrt{3}$.

（1）求证：$BD\perp OE$；（2）求二面角 $E-BD-C$ 的大小；（3）求点 C 到平面 EBD 的距离.

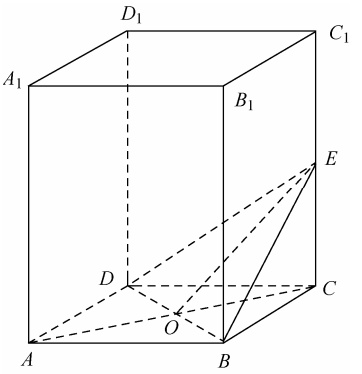


图 9-5

第 10 章　概率统计　阶段测试卷

考试时间：120 分钟　总分：150 分

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．下列每小题中，只有一个正确答案）

1．将3个不同的小球放入4个盒子中，则不同放法种数有（　　）

A．81　　B．64　　C．12　　D．14

2．设 A、B 为两个事件，且 $P(A)=0.3$，则当（　　）时一定有 $P(B)=0.7$（　　）

A．A 与 B 互斥　　B．A 与 B 对立　　C．$A\subseteq B$　　D．A 不包含 B

3. 一个袋中装有 2 个红球和 2 个白球，现从袋中取出 1 球，然后放回袋中再取出一球，则取出的两个球同色的概率是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{2}{5}$

4. 如图 10-1 所示，随机在图中撒一把豆子，则它落到阴影部分的概率是（　　）

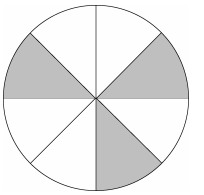


图 10-1　题 4 图

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{3}{8}$　　D. $\frac{1}{8}$

5．将一个容量为 n 的样本分成若干组，已知某组的频数与频率分别为 40、0.125，则 n 的值为（　　）

A．640　　B．320　　C．240　　D．160

6. 两个事件互斥是两个事件对立的（　　）条件.

A. 充分不必要　　B. 必要不充分

C. 充分必要　　D. 既不充分也不必要

7. 一箱内有十张标有 0 到 9 的卡片，从中任选一张，则取到卡片上的数字不小于 6 的概率是（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{1}{4}$

8．设有一个直线回归方程为 $y=2-1.5x$，则变量 x 增加一个单位时（　　）

A．y 平均增加 1.5 个单位　　B．y 平均增加 2 个单位

C．y 平均减少 1.5 个单位　　D．y 平均减少 2 个单位

9. 一组数据的方差为 s^2，将这组数据中的每个数都扩大 2 倍，所得一组新数据的方差为（　　）

A. s^2　　B. $\frac{1}{2}s^2$　　C. $2s^2$　　D. $4s^2$

10. 为了了解某校高三学生的视力情况，随机地抽查了该校 100 名高三学生的视力情况，得到频率分布直方图，如图 10-2 所示，由于不慎将部分数据丢失，但知道前 4 组的频数成等比数列，后 6 组的频数成等差数列，设最大频率为 a，视力在 4.6 到 5.0 之间的学生数为 b，则

a、b 的值分别为 （ ）

A．0.27，78　　B．0.27，83　　C．2.7，784　　D．2.7，83

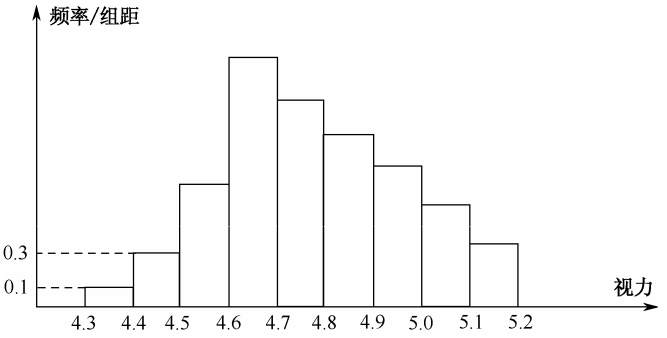


图 10-2　题 10 图

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11．某校有行政人员、教学人员和教辅人员共 200 人，其中教学人员与教辅人员的比为 10:1，行政人员有 24 人，现采取分层抽样抽取一个容量为 50 的样本，那么行政人员应抽取的人数为_____.

12．对于回归方程 $y=4.75x+257$，当 $x=28$ 时，y 的估计值为_____.

13．某班委会由 4 名男生与 3 名女生组成，现从中选出 2 人担任正副班长，其中至少有 1 名女生当选的概率是_____.

14．一个容量为 40 的样本，分成若干组，在它的频率分布直方图中，某一组相应的小长方形的面积为 0.4，则该组的频数是_____.

15．若以连续掷两次骰子分别得到的点数 m、n 作为点 P 的坐标，则点 P 落在圆 $x^2+y^2=25$ 外的概率是_____.

三、解答题（本大题 8 小题，共 90 分）

16.（12 分）在一次读书活动中，有 5 本不同的政治书，10 本不同的科技书，20 本不同的小说供同学选用.

（1）某同学若要从这三类书中任选一本，则有多少种不同的选法？

（2）若要从这三类书中各选一本，则有多少种不同的选法？

（3）若要从这三类书中选不属于同一类的两本，则有多少种不同的选法？

17.（6 分）从含有两件正品 a_1、a_2 和一件次品 b_1 的三件产品中，每次任取一件，每次取出后不放回，连续取两次，求取出的两件产品中恰有一件次品的概率.

18.（10 分）甲盒子中有红、黑、白三种颜色的球各 3 个，乙盒子中有黄、黑、白三种颜色的球各 2 个，从两个盒子中各取 1 个球.

求：（1）取出的两个球是相同颜色的概率；（2）取出的两个球是不同颜色的概率.

19.（12 分）已知 40 个数据的平方和是 36，平均数是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，求这组数据的标准差.

20.（12 分）甲、乙两位同学进行投篮比赛，每人玩 5 局. 每局在指定线外投篮，若第一次不进，再投第二次，以此类推，但最多只能投 6 次. 当投进时，该局结束，并记下投篮次数. 当 6 投不进，该局也结束，记为“×”. 当第一次投进得 6 分，第二次投进得 5 分，第三次投进得 4 分，依此类推. 第 6 次不投进，得 0 分. 两人投篮情况如下：

	第 1 局	第 2 局	第 3 局	第 4 局	第 5 局
甲	5 次	×	4 次	5 次	1 次
乙	×	2 次	4 次	2 次	×

请通过计算，判断哪位同学投篮的水平高？

21.（12 分）如图 10-3 所示，在边长为 25cm 的正方形中挖去边长为 23cm 的两个等腰 Rt△，现有均匀的粒子散落在正方形中，问粒子落在中间带形区域的概率是多少？

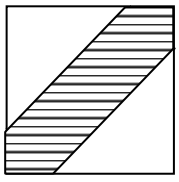


图 10-3　题 22 图

22.（12 分）一个容量为 100 的样本，数据的分组和各组的一些相关信息如下：

分组	频数	频率
[12，15）	6	
[15，18）		0.08
[18，21）	16	0.16
[21，24）	21	
[24，27）	18	0.18
[27，30）	16	0.16
[30，33）	10	0.10
[33，36）	5	0.05
合计	100	1.00

（1）完成上表中每一行的两个空格；

（2）画出频率分布直方图.

23.（14 分）假设关于某设备的使用年限 x（年）和所支出的维修费用 y（万元）有如下统计资料：

x（年）	2	3	4	5	6
y（万元）	2.2	3.8	5.5	6.5	7.0

若由资料知，y 对 x 成线性相关关系，试求：

（1）回归直线方程；

（2）估计使用年限为 10 年时，维修费用约是多少？

高一年级下学期期中测试卷

考试时间：120 分钟　总分：150 分

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．下列每小题中，只有一个正确答案）

1．若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，S_n 表示前 n 项的和，$S_3=3a_3$，则公比 $q=$　（　）

A. 1或 $-\frac{1}{2}$　　B. -1或 $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$或 $\frac{1}{2}$

2．已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为正数，且 $a_3a_9=2{a_5}^2$，$a_2=1$，则 $a_1=$　（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D.2

3．在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，若点 D 满足 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，则 $\overrightarrow{AD}=$　（　）

A. $\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$　　B. $\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}$　　C. $-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{5}{3}\vec{c}$　　D. $\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

4．下列算式正确的是　（　）

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$　　B. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$

C. $0\overrightarrow{AB}=\vec{0}$　　D. $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$

5．若直线 l：$y=kx-1$ 与直线 $x+y-1=0$ 的交点在第一象限，则实数 k 的取值范围是　（　）

A. $(-\infty,-1)$　　B. $(-\infty,-1]$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

6．已知点 $(3,m)$ 到直线 $x+\sqrt{3}y-4=0$ 的距离等于 1，则 $m=$　（　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $-\sqrt{3}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$或 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

7．点 $(3,9)$ 关于直线 $x+3y-10=0$ 对称点的坐标是　（　）

A. $(-1,-3)$　　B. $(17,9)$　　C. $(-1,3)$　　D. $(17,-9)$

8．已知圆的半径为 2，圆心在 x 轴的正半轴上，且与 $3x+4y+4=0$ 直线相切，则圆的方程是　（　）

A. $x^2+y^2-2x+3=0$　　B. $x^2+y^2+4x=0$

C. $x^2+y^2+2x-3=0$　　D. $x^2+y^2-4x=0$

9．若 $P(2,-1)$ 为圆 $(x-1)^2+y^2=25$ 的弦 AB 的中点，则直线 AB 的方程是　（　）

A. $x-y-3=0$　　B. $2x+y-3=0$　　C. $x+y-1=0$　　D. $2x-y-5=0$

10．直线 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$ 截圆 $x^2+y^2=4$ 得的劣弧所对的圆心角为　（　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11．已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_4=15$，$S_5=55$，则过点 $P(3,\ a_3)$，$Q(4,\ a_4)$ 的直线方程是_____.

12．已知数列 $\{a_n\}$ 的前项和 $S_n=n^2-9$，若它的第 k 项满足 $5<a_k<8$，则 $k=$_____.

13．已知 $m\neq 0$，则过点 $(1,\ -1)$ 的直线 $ax+3my+2a=0$ 的斜率为_____.

14．若直线 l_1：$2x+my+1=0$ 与直线 l_2：$y=3x-1$ 平行，则 $m=$_____.

15．设直线 $2x+3y+1=0$ 和圆 $x^2+y^2-2x-3=0$ 相交于 A、B 两点，则弦 AB 的垂直平分线方程是_____.

三、解答题（本大题 8 小题，共 90 分）

16.（10 分）有四个数，前三个数成等比数列，其和为 19，后三个数成等差数列，其和为 12. 求此四个数.

17.（12 分）设 $\{a_n\}$ 是公比为正数的等比数列，$a_1=2$，$a_3=a_2+4$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列，求数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18.（10 分）在 $\triangle ABC$ 中，已知 $A(2,\ -1)$，$B(3,\ 2)$，$C(-3,\ -1)$，BC 边上的高为 AD. 求：

（1）$|\overrightarrow{BC}|$；（2）$\overrightarrow{AD}$.

19.（12 分）已知向量$\vec{x}=(\sqrt{3},-1)$，$\vec{y}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，若存在实数 k 和 t，使得$\vec{a}=\vec{x}+(t^2-3)\vec{y}$，$\vec{b}=-k\vec{x}+t\vec{y}$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$.

（1）试求函数关系式$k=f(t)$；

（2）若$t>0$，且不等式$f(t)>mt^2-t$恒成立，求实数 m 的取值范围.

20.（10 分）求经过直线l_1：$2x+3y-1=0$，l_2：$3x-2y-8=0$的交点且平行于直线$x+2y-3=0$的直线方程.

21.（12 分）已知直线 l 过点 $P(2,1)$，且与两坐标轴围成等腰直角三角形，求直线 l 的方程.

22.（12 分）求经过两圆 $x^2+y^2+6x-4=0$ 和 $x^2+y^2+6y-28=0$ 的交点，且圆心在直线 $x-y-3=0$ 上的圆的方程.

23.（12 分）已知圆 C 与圆 $x^2+y^2-2x=0$ 相外切，并且与直线 $x+\sqrt{3}y=0$ 相切于点 $Q(3,-\sqrt{3})$. 求圆 C 的方程.

高一年级下学期期末测试卷

考试时间：120 分钟　总分：150 分

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．下列每小题中，只有一个正确答案）

1．等差数列 51，47，43，…中，第一个负数项是　（　　）

A．第 13 项　　B. 第 14 项　　C. 第 15 项　　D. 第 16 项

2．从装有 2 个红球和 2 个黑球的口袋内任取 2 个球，那么互斥而不对立的两个事件是　（　　）

A．至少有一个红球与都是黑球　　B．至少有一个黑球与都是黑球

C．至少有一个黑球与至少有 1 个红球　D．恰有 1 个黑球与恰有 2 个黑球

3．若 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角的大小　（　　）

A．$\frac{2\pi}{3}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{6}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

4．直线 $x=\sqrt{3}y$ 的倾斜角是　（　　）

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{6}$　　D．$\frac{\pi}{2}$

5．设 $\sqrt{3}$，$x+1$，$\sqrt{27}$ 成等比数列，则 x 等于　（　　）

A．2　　B．4　　C．−10　　D．2 或−4

6．从某项综合能力测试中抽取 100 人的成绩，统计如下表所示，则这 100 人成绩的标准差为　（　　）

分数	5	4	3	2	1
人数	20	10	30	30	10

A．$\sqrt{3}$　　B．$\frac{2\sqrt{10}}{5}$　　C．3　　D．$\frac{8}{5}$

7．$x^2+y^2+2ax-by+c=0$ 表示圆心为 $C(-2,-2)$，$r=2$ 的圆，则 a，b，c 的值依次为　（　　）

A．2，4，4　　B．−2，4，4　　C．2，−4，4　　D．2，−4，−4

8．直线 $ax+2y+1=0$ 与 $x+y-2=0$ 相互垂直，则 a 的值是　（　　）

A．1　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．$-\frac{2}{3}$　　D．−2

9．已知直线 a、b、c，若 $a\perp c$，$b\perp c$，则 a 与 b 的位置关系　（　　）

A．平行　　B．异面　　C．平行或异面　　D．平行、相交或异面

10．在面积为 S 的△ABC 的边 AB 上任取一点 P，则△PBC 的面积大于 $\frac{S}{4}$ 的概率是（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{2}{3}$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11．若直线 l_1：$x-y+1=0$，l_2：$2x-y=0$，l_3：$kx-2y+3=0$ 相交于一点，则 $k=$____.

12．在 $\triangle ABC$ 中，$BC=3$，$AC=4$，$\angle C=30^\circ$，则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=$_____.

13．边长为 2 的正方形内有一内切圆，在正方形内随机投掷一个点，则该点落到圆内的概率是_____.

14．已知等差数列 $\{a_n\}$，$a_5+a_7=112$，则 $S_{11}=$_____.

15．一个社会调查机构就某地居民的月收入调查了 10000 人，并根据所得数据画了样本的频率分布直方图（如图 1 所示）．为了分析居民的收入与年龄、学历、职业等方面的关系，要从这 10000 人中再用分层抽样方法抽出 100 人做进一步调查，则在[2500，3500]（元）月收入段应抽出_____人.

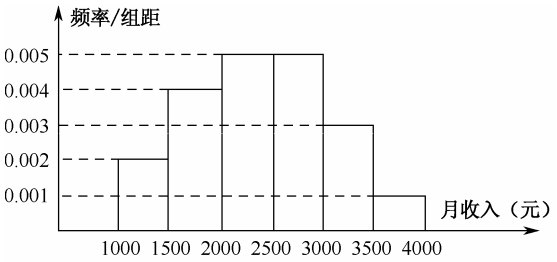


图 1　题 15 图

三、解答题（本大题共 8 小题，共 90 分）

16.（10 分）现有 8 名奥运会志愿者，其中志愿者 A_1、A_2、A_3 通晓日语，B_1、B_2、B_3 通晓俄语，C_1、C_2 通晓韩语．从中选出通晓日语、俄语和韩语的志愿者各 1 名，组成一个小组．

求：（1）A_1 被选中的概率；（2）B_1 和 C_1 不全被选中的概率．

17.（10 分）直线 l 过点 $P(2,\ 1)$，按下列条件求直线 l 的方程.

（1）直线 l 与直线 $3x-4y+2=0$ 平行；

（2）直线 l 与两坐标轴正向围成的三角形面积为 4.

18.（10 分）已知 $\vec{a}=(1,\ \cos x)$，$\vec{b}=\left(\frac{1}{3},\ \sin x\right)$，$x\in(0,\ \pi)$.

（1）若 $\vec{a}//\vec{b}$，求 $\tan x$ 的值；（2）若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，求 $\sin x-\cos x$ 的值.

19.（12 分）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-60$，$a_{17}=-12$.

求：（1）数列 $\{a_n\}$ 通项公式；（2）此数列前 n 项的和.

20.（12 分）求过点 $A(3,1)$ 和直线 $x+y+4=0$ 相切，且圆心在直线 $y=-x$ 上的圆的方程.

21.（12 分）如图 2 所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，$\angle ADC=45^{\circ}$，$AD=AC=1$，O 为 AC 的中点，$PO\perp$ 平面 $ABCD$，$PO=2$，M 为 PD 的中点.

证明：（1）PB //平面 ACM；（2）$AD\perp$ 平面 PAC.

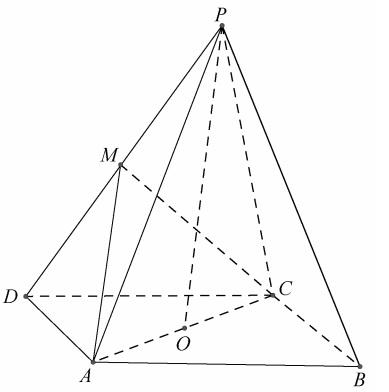


图 2　题 21 图

22.（12 分）已知曲线 C：$x^2+y^2-2x-4y+m=0$.

（1）当 m 为何值时，曲线 C 表示圆；

（2）若曲线 C 与直线 $x+2y-4=0$ 交于 M、N 两点，且 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$（$O$ 为坐标原点），求 m 的值.

23.（12 分）为了分析某个高三学生的学习状态，对其下一阶段的学习提供指导性建议．现对他前 7 次考试的数学成绩 x、物理成绩 y 进行分析．下面是该生 7 次考试的成绩：

数学	88	83	117	92	108	100	112
物理	94	91	108	96	104	101	106

（1）他的数学成绩与物理成绩哪个更稳定？请给出你的证明；

（2）已知该生的物理成绩 y 与数学成绩 x 是线性相关的．①写出线性回归方程；②若该生的物理成绩达到 115 分，请你估计他的数学成绩大约是多少？

测试卷参考答案

第6章　数列　阶段测试卷

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	D	C	B	C	A	C	B	C	B

二、填空题

11. 1023；　12. 6；　13. −10；　14. 1 或$\frac{3}{4}$；　15. 32

三、解答题

16. $d=\frac{2}{3}$，$n=50$

17. $a_n=0.2n$，$a_{51}+a_{52}+\cdots+a_{80}=393$

18. 解：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，则 $q\neq 0$，$a_2=\frac{a_3}{q}=\frac{2}{q}$，$a_4=a_3q=2q$

所以$\frac{2}{q}+2q=\frac{20}{3}$，解得 $q_1=\frac{1}{3}$，$q_2=3$，

当 $q_1=\frac{1}{3}$ 时，$a_1=18$，所以 $a_n=18\times(\frac{1}{3})^{n-1}=\frac{18}{3n1}=2\times3^{3-n}$.

当 $q=3$ 时，$a_1=\frac{2}{9}$，所以 $a_n=\frac{2}{9}\times 3n-1=2\times3^{n-3}$.

19. 解：设这四个数为$\frac{a}{q}$，a，aq，$2aq-a$

则$\begin{cases}\frac{a}{q}a\cdot aq=216 & ①\\ a+aq+(3aq-a)=36 & ②\end{cases}$　由①，得 $a^3=216$，$a=6$　③

③代入②，得 $3aq=36$，$q=2$　∴这四个数为 3，6，12，18.

20. 解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，由已知$a_3=a_1+2d=5$，$S_{15}=15a_1+\frac{15+14}{2}d=225$

即$\begin{cases}a_1+2d=5\\ a_1+7d=15\end{cases}$　解得 $a_1=1$，$d=2$

所以 $a_n=2n-1$.

设等比数列$\{b_n\}$的公比为 q，由已知$b_3=a_2+a_3$，得$b_1q^2=8$

由已知$b_2b_5=128$，得$b_1^2q^5=128$

解得$b_1=2$，$q=2$

所以$T_8=\frac{2\times(1-2^8)}{1-2}=510$.

（2）$\frac{1}{a_n-7}>\frac{1}{4}$ 即 $\frac{1}{2n-8}>\frac{1}{4}$ 解得 $4<n<6$，即 $n=5$.

21. 解：设等差数列首项为 a_1，公差为 d，依题意得 $\begin{cases}4a_1+6d=-62\\6a_1+15d=-75\end{cases}$

解得 $a_1=-20$，$d=3$.

（1）$a_n=a_1+(n-1)d=3n-23$，$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{n(-20+3n-23)}{2}=\frac{3}{2}n^2-\frac{43}{2}n$；

（2）∵ $a_1=-20$，$d=3$ ∴ $\{a_n\}$的项随着n的增大而增大.

设$a_k\leqslant 0$且$a_{k+1}\geqslant 0$，得$3k-23\leqslant 0$，且$3(k+1)-23\geqslant 0$，

∴ $\frac{20}{3}\leqslant k\leqslant\frac{23}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

$k=7$，即第7项之前均为负数，

∴ $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{14}|=-(a_1+a_2+\cdots+a_7)+(a_8+a_9+\cdots+a_{14})$

$=S_{14}-2S_7=147$.

22. 解：（1）由 $a_{n+1}=2S_n+1$ 可得 $a_n=2S_{n-1}+1(n\geqslant 2)$，两式相减得

$a_{n+1}-a_n=2a_n$，$a_{n+1}=3a_n(n\geqslant 2)$

又 $a_2=2S_1+1=3$ ∴ $a_2=3a_1$

故 $\{a_n\}$ 是首项为1，公比为3的等比数列.

∴ $a_n=3^{n-1}$.

（2）设 $\{b_n\}$ 的公差为 d

由 $T_3=15$ 可得 $b_1+b_2+b_3=15$， $b_2=5$

故可设 $b_1=5-d$，$b_3=5+d$

又 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=9$

由题意可得 $(5-d+1)(5+d+9)=(5+3)^2$

解得 $d_1=2$，$d_2=-10$

∵ 等差数列 $\{b_n\}$ 的各项为正 ∴ $d>0$

∴ $d=2$

∴ $T_n=3n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+2n$.

23. 解：（Ⅰ）由题设知每年费用是以 12 为首项，4 为公差的等差数列，设纯收入与年数的关系为 $f(n)$

∴ $f(n)=50n-[12+16+\cdots+(8+4n)]-98=40n-2n^2-98$

获利即为 $f(n)>0$

∴ $40n-2n^2-98>0$，即 $n^2-20n+49<0$

解得 $10-\sqrt{51}<n<10+\sqrt{51}$ 即 $2.2<n<17.1$ 又 $n\in\mathbf{N}$，∴n=3，4，…，17

∴当 n=3 时即第 3 年开始获利.

（Ⅱ）（1）年平均收入=$\frac{f(n)}{n}=40-2(n+\frac{49}{n})$ ∵ $n+\frac{49}{n}\geqslant 2\sqrt{n\times\frac{49}{n}}=14$，当且仅当 $n=7$ 时取“=”

$\therefore \frac{f(n)}{n} \leqslant 40-2\times14=12$（万元）即年平均收益，总收益为 12×7+26=110 万元，此时 n=7.

（2）$f(n)=-2(n-10)^2+102$ ∴当 $n=10$，$f(n)_{\max}=102$

总收益为 102+8=110 万元，此时 n=10

比较两种方案，总收益均为 110 万元，第一种方案需 7 年，第二种方案需 10 年，故选择第一种方案.

第 7 章　平面向量　阶段测试卷

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	B	A	C	A	D	C	A	B

二、填空题

11．4 或 6　　12．–3　　13．4　　14．4　　15．3

三、解答题（共 78 分）

16．解：设 $B(x,\ y)$

$\overrightarrow{AB}=(x+1,\ y+5)$

$3\vec{a}=(6,\ 9)$

由 $\overrightarrow{AB}=3\vec{a}$，

得 $(x+1,\ y+5)=(6,\ 9)$

$\therefore \begin{cases} x+1=6 \\ y+5=9 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$

17．解：$k\vec{a}+\vec{b}=(k-3,\ 2k+2)$

$\vec{a}-3\vec{b}=(10,\ -4)$

∵ $k\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-3\vec{b}$ 平行

$\therefore -4(k-3)-10(2k+2)=0$

$k=-\frac{1}{3}$，得：$k\vec{a}+\vec{b}=(-\frac{10}{3},\ \frac{4}{3})$，$\vec{a}-3\vec{b}=(10,\ -4)$，∴方向相反.

18．解：（1）$\vec{a}+\vec{b}=(2,\ 6)$

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$；

（2）$\vec{b}+3\vec{c}=(8,\ -1)$

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+3\vec{c})=(3,\ 4)\cdot(8,\ -1)=20$.

19．解：∵ $\vec{a}=(\sin x,\ 1)$，$\vec{b}=\left(\cos x,\ -\frac{1}{2}\right)$

$\therefore$ 当$\vec{a}\perp\vec{b}$时，由$\sin x\cos x-\frac{1}{2}=0$

即$\sin x\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\sin x+\cos x)^2+(1-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{1+2\sin x\cos x+\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}$.

20．解：（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=4\times 7\times\frac{1}{2}=14$.

（2）$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=37$

$\therefore|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{37}$.

（3）设$\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{b}$的夹角为θ

$\because(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=14-49=-35$

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=|\vec{a}-\vec{b}|\times|\vec{b}|\cos\theta=7\sqrt{37}\cos\theta$

$\therefore\cos\theta=\frac{-35}{7\sqrt{37}}=-\frac{5\sqrt{37}}{37}$.

21．解：（1）$\overrightarrow{AC}=(\cos\alpha-3,\ \sin\alpha)$，$\overrightarrow{BC}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha-3)$

$\because|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$　$\therefore\sqrt{(\cos\alpha-3)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{\cos^2\alpha+(\sin\alpha-3)^2}$

$\therefore\cos\alpha=\sin\alpha$　$\therefore\tan\alpha=1$.

（2）$\because\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\cos^2\alpha-3\cos\alpha+\sin^2\alpha-3\sin\alpha=-1$

$\therefore\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{2}{3}$

两边平方得$1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4}{9}$，$2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{5}{9}$

化简$\frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\tan\alpha}=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{5}{9}$.

22．解：（1）$\overrightarrow{AC}=(\cos\theta-2,\ \sin\theta)$，$\overrightarrow{BC}=(\cos\theta,\ \sin\theta-2)$

$\because\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$　$\therefore\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，即$\cos\theta(\cos\theta-2)+\sin\theta(\sin\theta-2)=0$

$\therefore\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{4}$.

（2）$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})^2=7\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}$　$\therefore\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{OB}=(0,\ 2)$，$\overrightarrow{OC}=(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})$，设$\overrightarrow{OB}$和$\overrightarrow{OC}$的夹角为$\alpha$

则$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\therefore\alpha=\frac{\pi}{6}$.

23．解：（1）$\because\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

$\therefore\vec{a}\perp\vec{b}$.

（2）$\because \left[\vec{a}+(x-3)\vec{b}\right]\perp\left[-y\vec{a}+x\vec{b}\right]$

$\therefore \left[\vec{a}+(x-3)\vec{b}\right]\left(-y\vec{a}+x\vec{b}\right)=0$

$\therefore -y\vec{a}^2+(x^2-3x)\vec{b}^2+(x-xy+3y)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\because \vec{a}^2=|\vec{a}|^2=4$

$\vec{b}^2=|\vec{b}|^2=1$

$\therefore -4y+x^2-3x=0$

$\therefore y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x$.

（3）$\because y=-\frac{1}{4}(x^2-3x)=-\frac{1}{4}(x-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{16}$

$\therefore$ 当$x=\frac{3}{2}$时，y的最大值为$\frac{9}{16}$.

第8章　直线与圆的方程　阶段测试卷

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	C	A	C	D	A	B	C	B

二、填空题

11. $3x+2y-13=0$　　12. $\frac{\pi}{4}$　　13. 1 或 -25　　14. 2　　15. $x-y\pm6=0$

三、解答题

16. 解：联立方程组$\begin{cases}3x+4y-5=0\\2x-3y+8=0\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$　$\therefore M(-1,2)$.

（1）设所求直线方程为$3x+y+m=0$

$\because$该直线经过点$M(-1,2)$

$\therefore m=1$

$\therefore$所求直线方程为$3x+y+1=0$.

（2）设所求直线方程为$x-3y+n=0$

$\because$该直线经过点$M(-1,2)$

$\therefore n=7$

$\therefore$所求直线方程为$x-3y+7=0$.

17. 解：（1）由$\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}$得$\begin{cases}x_C=4\\y_C=-4\end{cases}$

$\therefore$ 点$C(4,-4)$.

（2）$\because$ 直线l平分平行四边形$ABCD$

$\therefore l$过平行四边形$ABCD$中心（4，2）.

$\therefore l$ 方程：$y-2=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)$，即 $x-\sqrt{3}y-4+2\sqrt{3}=0$.

18. 解：∵圆心在 $y=0$ 上，故圆的方程可设为 $(x-a)^2+y^2=r^2$.

又∵该圆过 $A(1,4)$，$B(3,2)$ 两点

$\therefore \begin{cases}(1-a)^2+16=r^2\\(3-a)^2+4=r^2\end{cases}$

解得：$a=-1$，$r^2=20$

所以所求圆的方程为 $(x+1)^2+y^2=20$.

点 $P(-4,4)$ 代入圆的方程左边得：$(-4+1)^2+4^2=25>20$

∴点在圆外.

19. 解：由 $\begin{cases}y=2x+3\\y=x+1\end{cases}$ 知直线 l_1 与 l 的交点坐标为 $(-2,-1)$

所以设直线 l_2 的方程为 $y+1=k(x+2)$，即 $kx-y+2k-1=0$

在直线 l 上任取一点 $(1,2)$，由题设知点 $(1,2)$ 到直线 l_1、l_2 的距离相等

由点到直线的距离公式得：$\frac{|k-2+2k-1|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|2-2+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

解得 $k=\frac{1}{2}$ 或 $k=2$（舍去）

所以直线 l_2 的方程为 $x-2y=0$.

20. 解：设圆心为 C，则 $CB\perp l$，∴直线 CB 的方程为 $3x-y-18=0$ ①

设直线 CB 与圆 C 的另一个交点为 P，连接 AP、AB，则 $AP\perp AB$

∴直线 AP 的斜率为 $-\frac{8-(-2)}{6-(-4)}=-1$，直线 AP 的方程为 $x+y+6=0$ ②

联立①②得 P 的坐标为 $(3,-9)$

再由 C 为线段 BP 的中点知，C 的坐标为 $\left(\frac{11}{2},-\frac{3}{2}\right)$，$r=|AC|=\sqrt{\frac{125}{2}}$

∴圆的方程为 $\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{125}{2}$.

21. 解：（1）整理 l 方程为 $(x+2y-7)m+(2x+y-8)=0$

则 l 过直线 $x+2y-7=0$ 和 $2x+y-8=0$ 的交点

由 $\begin{cases}x+2y-7=0\\2x+y-8=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$

∴l 过定点 $A(3,2)$，圆心 $C(2,3)$，半径 $r=2$

∵$|AC|=\sqrt{2}<2$

∴点 A 在圆 C 内部

∴l 与圆 C 恒相交.

（2）$k_1\cdot k_{AC}=-1$，$(-\frac{m+2}{2m+1})(\frac{2-3}{3-2})=-1$

∴$m=-1$.

22. 解：（1）依题意可得圆心 C（a，2），半径 $r=2$

则圆心到直线 l：$x-y+3=0$ 的距离 $d=\dfrac{|a-2+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|a+1|}{\sqrt{2}}$

由勾股定理可知 $d^2+(\dfrac{2\sqrt{2}}{2})^2=r^2$，代入化简得 $|a+1|=2$

解得 $a=1$ 或 $a=-3$，又 $a>0$，所以 $a=1$.

（2）由（1）知圆 C：$(x-1)^2+(y-2)^2=4$

又(3，5)在圆外

∴①当切线方程的斜率存在时，设方程为 $y-5=k(x-3)$

由圆心到切线的距离 $d=r=2$ 可解得 $k=\dfrac{5}{12}$

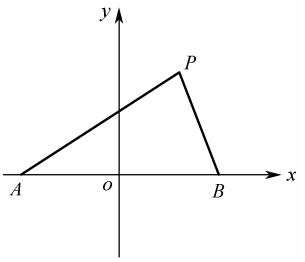
∴切线方程为 $5x-12y+45=0$

②当过(3，5)斜率不存在时，直线方程为 $x=3$ 与圆相切

由①②可知切线方程为 $5x-12y+45=0$ 或 $x=3$.

23. 解：如图所示，以 A、B 所确定的直线为 x 轴，A、B 中点 O 为坐标原点，建立直角坐标系，则 $A(-5,0)$，$B(5,0)$

设某地 P 的坐标为(x，y)，且 P 地居民选择 A 地购买商品便宜并设 A 地的运费为 $3a$ 元/千米，B 地的运费为 a 元/千米



P 地到 A 地运费≤P 地到 B 地运费，

即 $3a\sqrt{(x+5)^2+y^2}\leqslant a\sqrt{(x-5)^2+y^2}$

∵ $a>0$

∴ $3\sqrt{(x+5)^2+y^2}\leqslant\sqrt{(x-5)^2+y^2}$

即 $\left(x+\dfrac{25}{4}\right)^2+y^2\leqslant\left(\dfrac{15}{4}\right)^2$

∴以点 $C\left(-\dfrac{25}{4},0\right)$ 为圆心，$\dfrac{15}{4}$ 为半径的圆是这两地购货的分界线.

第9章　立体几何　阶段测试卷

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	D	C	B	C	C	D	D	A

二、填空题

11. 垂直　　12. 平行或相交或异面　　13. $27\,\text{cm}^2$　　14. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　15. $\sqrt{3}r$

三、解答题

16. 解：由题意知圆锥的底面半径 $R=6$，截面半径为 $r=3$，设圆锥的母线为 l，高为 h，

由题意得：$\frac{3}{6}=\frac{l-5}{l}$得 $l=10$，$h=\sqrt{l^2-R^2}=8$

$S_{侧}=\pi Rl=60\pi\text{cm}^2$，$V=\frac{1}{3}\pi R^2h=96\pi\text{cm}^3$.

17. 证明：连接 AC 交 BD 于 O，连接 EO，

∵E 为 AA_1 的中点，O 为 AC 的中点

∴EO 为三角形 A_1AC 的中位线　∴ $EO // A_1C$

又 EO 在平面 BDE 内，A_1C 在平面 BDE 外

∴ $A_1C //$ 平面 BDE.

18. 证明：∵ $AB=BC$，$\angle B=90^\circ$　∴ $\angle ACB=45^\circ$

而 $\angle C=135^\circ$ ∴ $\angle ACD=90^\circ$ 即 $DC\perp AC$

∵ $D-AC-B$ 为直二面角　∴ $DC\perp$ 平面 ABC

∵ $AB\subset$ 平面 ABC　∴ $DC\perp AB$　又 $AB\perp BC$，$BC\cap DC=\{C\}$

∴ $AB\perp$ 平面 BCD.

19. 解：（1）连接 PB，∵ $PA\perp$ 平面 $ABCD$，∵ $ABCD$ 是正方形，∴ $CB\perp AB$ 得：$PB\perp BC$，

所以线段 PB 就是点 P 到直线 BC 的距离.

在 Rt△PAB 中，$PA=a$，$AB=a$，∴ $PB=\sqrt{2}a$；

所以点 P 到直线 BC 的距离为 $\sqrt{2}a$.

（2）连接 AC，∵ $ABCD$ 是正方形，∴ $AC\perp BD$，得：$PC\perp BD$

所以异面直线 PC 与 BD 所成的角是 90°

20.（1）证明：取 AB 中点 M，∵ △PAB 与 △CAB 均为正三角形，

∴ $AB\perp PM$，$AB\perp CM$，∴ $AB\perp$ 平面 PCM.

∴ $AB\perp PC$.

（2）解：当 $PM\perp$ 平面 ABC 时，三棱锥的高为 PM，

此时 $V_{\max}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PM=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{8}$.

21.（1）证明：在 △ABD 中，∵ E、H 分别是 AB、AD 的中点　∴ $EH // BD$，$EH=\frac{1}{2}BD$

同理，$FG // BD$，$FG=\frac{1}{2}BD$　∴ $EH // FG$，$EH=FG$　∴四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

（2）90°、30°.

22.（1）证明：由 C' 在平面 ABD 上的射影 O 恰好在 AB 上知，平面 $ABC'\perp$ 平面 $ABCD$，

$DA\perp AB$，所以 $DA\perp$ 平面 ABC'，因此 $DA\perp BC'$

而 $DC'\perp BC'$，所以 $BC'\perp$ 平面 $AC'D$，从而 $AC'\perp BC'$.

（2）解：设点 A 到平面 BDC' 的距离为 h，

由 $V_{A-BC'D}=V_{D-ABC'}$，得 $\frac{1}{3}S_{\triangle BC'D}\times h=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC'}\times DA$，解得 $h=\sqrt{6}$

设直线 AB 与平面 BDC' 所成的角为 α，则 $\sin\alpha=\frac{h}{AB}=\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

故直线 AB 与平面 BDC' 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

23.（1）证明：因为 $EC \perp$ 平面 $ABCD$

所以 EO 在平面 $ABCD$ 内的射影为 OC

$BD \perp OC$

所以，$BD \perp OE$.

（2）解：$BD \perp OE$，$BD \perp AC$

所以 $\angle EOC$ 为二面角 $E-BD-C$ 的平面角

$OC=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\sqrt{3}$

$EC=\sqrt{3}$

$\tan\angle EOC=1$

$\angle EOC=45^\circ$

所以二面角 $E-BD-C$ 的大小为 45°.

（3）解：因为 $BD \perp$ 平面 EOC

所以平面 $EBD \perp$ 平面 EOC

过 C 作 $CH \perp EO$ 于 H，$CH \perp$ 平面 EBD

$CH=\frac{\sqrt{2}}{2}EC=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

第 10 章　概率统计　阶段测试卷

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	B	A	C	B	B	C	C	D	A

二、填空题

11. 6　　12. 390　　13. $\frac{5}{7}$　　14. 16　　15. $\frac{7}{12}$

三、解答题

16. 解：（1）$5+10+20=35$ 种.

（2）$5\times10\times20=1000$ 种.

（3）$5\times10+5\times20+10\times20=350$ 种.

17. 解：每次取出一个，取后不放回地连续取两次，其一切可能的结果组成的基本事件有 6 个，用 A 表示“取出的两件中，恰好有一件次品”这一事件，事件 A 由 4 个基本事件组成，因而：$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

18. 解：设事件 $A=$“取出的两球是相同颜色”，事件 $B=$“取出的两球是不同颜色”，则事件 A 的概率为：$P(A)=\frac{3\times2+3\times2}{9\times6}=\frac{2}{9}$

由于事件 A 与事件 B 是对立事件，所以事件 B 的概率为：

$P(B)=1-P(A)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$.

19. 解：$s=\sqrt{\frac{1}{40}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_{40}-\bar{x})^2]}$

$=\sqrt{\frac{1}{40}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{40}^2)-\frac{2(x_1+x_2+\cdots+x_{40})\bar{x}}{40}+\bar{x}^2}=\sqrt{\frac{36}{40}-\bar{x}^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

20. 解：依题意，甲乙得分情况如下表：

	第一局	第二局	第三局	第四局	第五局
甲	2	0	3	2	6
乙	0	5	3	5	0

因为：甲得分平均数 = 2.6，乙得分平均数 = 2.6

甲得分的标准差 = 1.96，乙得分的标准差 = 2.24

所以：甲得分平均数=乙得分平均数

甲得分的标准差<乙得分的标准差

故甲投篮的水平高.

21．解：因为均匀的粒子落在正方形内任何一点是等可能的，所以符合几何概型的条件.

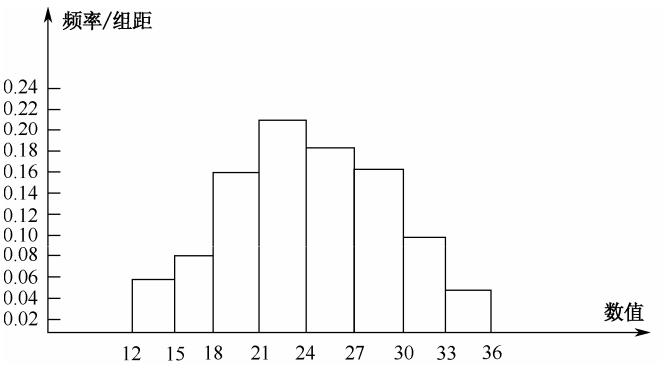
设 A =“粒子落在中间带形区域”，则依题意得正方形面积为：$25\times25=625$，两个等腰直角三角形的面积为：$2\times\frac{1}{2}\times23\times23=529$，带形区域的面积为：

$625-529=96$，$\therefore P(A)=\frac{96}{625}$.

22．解：（1）

分组	频数	频率
[12，15)	6	0.06
[15，18)	8	0.08
[18，21)	16	0.16
[21，24)	21	0.21
[24，27)	18	0.18
[27，30)	16	0.16
[30，33)	10	0.10
[33，36]	5	0.05
合计	100	1.00

（2）频率分布直方图：



频率分布直方图

23．解：（1）列表如下：

I	1	2	3	4	5
x_i	2	3	4	5	6
y_i	2.2	3.8	5.5	6.5	7.0
x_iy_i	4.4	11.4	22.0	32.5	42.0
$\bar{x}=4,\ \bar{y}=5,\ \sum_{i=1}^{5}x_i^2=90,\ \sum_{i=1}^{5}x_iy_i=112.3$					

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\frac{112.3-5\times4\times5}{90-5\times4^2}=\frac{12.3}{10}=1.23$$

$$a=\bar{y}-b\bar{x}=5-1.23\times4=0.08$$

∴回归直线方程为 $y=1.23x+0.08$

（2）当 $x=10$ 时，$y=1.23\times10+0.08=12.38$（万元）

即估计用 10 年时，维修费用约为 12.38 万元.

高一年级下学期期中测试卷

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	B	A	C	C	D	A	D	A	C

二、填空题

11．$4x-y-1=0$　12．4　13．$-\frac{1}{3}$　14．$-\frac{2}{3}$　15．$3x-2y-3=0$

三、解答题

16．解：由题意可设四个数分别是 x，$a-d$，a，$a+d$.

得 $\begin{cases}a-d+a+a+d=12\\x+a-d+a=19\\(a-d)^2=ax\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4\\d=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=4\\d=14\\x=25\end{cases}$

故所求四个数分别是 9，6，4，2 或 25，−10，4，18.

17．解：（1）由题意得：$a_1q^2=a_1q+4$，$a_1=2$，即 $q^2-q-2=0$

解得 $q=2$ 或 $q=-1$（舍去）

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=2^n$

（2）由题意得 $b_n=b_1+(n-1)d=2n-1$

所以 $S_n=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)=a_1+a_2+\cdots+a_n+b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=2^{n+1}+n^2-2$

18. 解：（1）$\because \overrightarrow{BC}=(-6,\ -3)$

$\therefore |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-6)^2+(-3)^2}=3\sqrt{5}$.

（2）设 D 点的坐标为 $(x,\ y)$，由题意可得

$\overrightarrow{AD}=(x-2,\ y+1),\ \overrightarrow{BC}=(-6,\ -3),\ \overrightarrow{BD}=(x-3,\ y-2)$

$\begin{cases}-6(x-2)-3(y+1)=0\\ \dfrac{x-3}{-6}=\dfrac{y-2}{-3}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

所以 $\overrightarrow{AD}=(-1,\ 2)$.

19. 解：（1）由题意得 $\vec{a}=(\sqrt{3},\ -1)+(\dfrac{t^2-3}{2},\ \dfrac{t^2-3}{2}\sqrt{3})=(\sqrt{3}+\dfrac{t^2-3}{2},\ -1+\dfrac{t^2-3}{2}\sqrt{3})$

$\vec{b}=(-\sqrt{3}k,\ k)+(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}t}{2})=(-\sqrt{3}k+\dfrac{t}{2},\ k+\dfrac{\sqrt{3}t}{2})$

$\because \vec{a}\perp\vec{b}\quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0$，即 $k=\dfrac{t^3-3t}{4}$

（2）由（1）得 $\dfrac{t^3-3t}{4}>mt^2-t\quad \because t>0\quad \therefore t^2-4mt+1>0$ 恒成立，即

$\Delta=(-4m)^2-4<0$ 得 $-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{2}$

20. 解：$\begin{cases}2x+3y-1=0\\ 3x-2y-8=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}$

设与直线 $x+2y-3=0$ 平行的直线方程为 $x+2y+c=0$，又过点 $(2,\ -1)$

得 $c=0$

故所求直线方程为 $x+2y=0$

21. 解：由题意可设直线 l 的方程为：$y-1=k(x-2)$，

令 $x=0$，则 $y=1-2k$，令 $y=0$，则 $x=2-\dfrac{1}{k}$，

$\therefore |1-2k|=|2-\dfrac{1}{k}|$，解得：$k=-1$ 或 $k=1$ 或 $k=\dfrac{1}{2}$（舍去）

直线 l 的方程为：$y-1=-(x-2)$ 或 $y-1=(x-2)$ 即 $x+y-3=0$ 或 $x-y-1=0$

22. 解：$\begin{cases}x^2+y^2+6x-4=0\\ x^2+y^2+6y-28=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=6\\ y=10\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1\\ y=5\end{cases}$

设圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 得

$\begin{cases}a-b-3=0\\ (6-a)^2+(10-b)^2=r^2\\ (1-a)^2+(5-b)^2=r^2\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=7\\ b=4\\ r^2=37\end{cases}$

故所求圆的方程为 $(x-7)^2+(y-4)^2=37$

23. 解：设圆 C 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 由题意得

$$\begin{cases}\dfrac{b+\sqrt{3}}{a-3}=\sqrt{3}\\ \sqrt{(a-1)+b^2}=1+\dfrac{|a+\sqrt{3}b|}{2}\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=4\\ b=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=0\\ b=-4\sqrt{3}\\ r=6\end{cases}$$

故所求圆的方程为 $(x-4)^2+y^2=4$ 或 $x^2+(y+4\sqrt{3})^2=36$.

高一年级下学期期末测试卷

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	A	C	D	B	C	D	D	B

二、填空题

11. 1　　12. $-6\sqrt{3}$　　13. $\dfrac{\pi}{4}$　　14. 616　　15. 25

三、解答题

16. 解：（1）从 8 人中选出日语、俄语和韩语志愿者各 1 名，其一切可能的结果组成的基本事件是：

$\Omega=\{(A_1, B_1, C_1), (A_1, B_1, C_2), (A_1, B_2, C_1), (A_1, B_2, C_2), (A_1, B_3, C_1), (A_1, B_3, C_2), (A_2, B_1, C_1), (A_2, B_1, C_2), (A_2, B_2, C_1), (A_2, B_2, C_2), (A_2, B_3, C_1), (A_2, B_3, C_2), (A_3, B_1, C_1), (A_3, B_1, C_2), (A_3, B_2, C_1), (A_3, B_2, C_2), (A_3, B_3, C_1), (A_3, B_3, C_2)\}$

由 18 个基本事件组成. 由于每一个基本事件被抽取的机会均等，因此这些基本事件的发生是等可能的.

用 M 表示“A_1 恰被选中”这一事件，则

$M=\{(A_1, B_1, C_1), (A_1, B_1, C_2), (A_1, B_2, C_1), (A_1, B_2, C_2), (A_2, B_3, C_1), (A_1, B_3, C_2)\}$

事件 M 由 6 个基本事件组成，因而 $P(M)=\dfrac{6}{18}=\dfrac{1}{3}$.

（2）用 N 表示“B_1，C_1 不全被选中”这一事件，则其对立事件 $\overline{N}$ 表示“B_1，C_1 全被选中”这一事件，

由于 $\overline{N}=\{(A_1, B_1, C_1), (A_2, B_1, C_1), (A_3, B_1, C_1)\}$，事件 $\overline{N}$ 由 3 个基本事件组成，

所以 $P(\overline{N})=\dfrac{3}{18}=\dfrac{1}{6}$，由对立事件的概率公式得 $P(N)=1-P(\overline{N})=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$.

17. 解：（1）由题意可以设直线方程为：$3x-4y+c=0$，把 $P(2, 1)$ 代入，

得到 $c=-2$，所求直线方程为：$3x-4y-2=0$.

（2）由题意可以设直线方程为：$y-1=k(x-2)$，

由题意直线在坐标轴上的分别截距为：$\dfrac{2k-1}{k}$，$1-2k$，

于是 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2k-1}{k}\cdot(1-2k)=4$，$k=-\dfrac{1}{2}$，方程为：$x+2y-4=0$.

18. 解：（1）由题意 $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{\cos x}{\sin x}$，$\tan x=\dfrac{1}{3}$.

（2）因为 $\vec{a}=(1,\ \cos x)$，$\vec{b}=\left(\dfrac{1}{3},\ \sin x\right)$，$x\in(0,\ \pi)$，

所以 $\sin x\cos x=-\dfrac{1}{3}$，$(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x=\dfrac{5}{3}$ 得 $\sin x-\cos x=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

19．解：（1）$a_{17}=a_1+16d$，即 $-12=-60+16d$，$\therefore d=3$　$\therefore a_n=-60+3(n-1)=3n-63$.

（2）$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{123}{2}n$.

20. 解：由题意可设圆的方程为：$(x-a)^2+(y+a)^2=r^2$ 得

$$\begin{cases}(3-a)^2+(1+a)^2=r^2\\ \dfrac{|a-a+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=r\end{cases}$$ 解得：$\begin{cases}a=1\\ r^2=8\end{cases}$

故所求圆的方程是 $(x-1)^2+(y+1)^2=8$

21．证明：（1）连接 MO，在平行四边形 $ABCD$ 中，因为 O 为 AC 的中点，所以 O 为 BD 的中点，又 M 为 PD 的中点，所以 $PB//MO$. 因为 $PB\not\subset$ 平面 ACM，$MO\subset$ 平面 ACM，所以 $PB//$平面 ACM.

（2）因为 $\angle ADC=45^\circ$，且 $AD=AC=1$，所以 $\angle DAC=90^\circ$，即 $AD\perp AC$，又 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PO\perp AD$，而 $AC\cap PO=O$，所以 $AD\perp$ 平面 PAC.

22．解：（1）由 $D^2+E^2-4F=4+16-4m=20-4m>0$，得 $m<5$.

（2）设 $M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，由 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$ 得 $x_1x_2+y_1y_2=0$.

将直线与曲线 C：$x^2+y^2-2x-4y+m=0$

联立并消去 y 得

$5x^2-8x+4m-16=0$，由韦达定理得 $x_1+x_2=\dfrac{8}{5}$ ①，$x_1x_2=\dfrac{4m-16}{5}$ ②，

又由 $x+2y-4=0$ 得 $y=\dfrac{1}{2}(4-x)$，$\therefore x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+\dfrac{1}{2}(4-x_1)\times\dfrac{1}{2}(4-x_2)=0$

将①、②代入得 $m=\dfrac{8}{5}$.

23. 解：（1）$\bar{x}=100+\dfrac{-12-17+17-8+8+12}{7}=100$；

$\bar{y}=100+\dfrac{-6-9+8-4+4+1+6}{7}=100$；

$\therefore S^2_{数学}=\dfrac{994}{7}=142$，$S^2_{物理}=\dfrac{250}{7}$，$S^2_{数学}>S^2_{物理}$，所以物理成绩更稳定.

（2）由于 x 与 y 之间具有线性相关关系，根据回归系数公式得到

$\hat{b}=\dfrac{497}{994}=0.5$，$\hat{a}=100-0.5\times100=50$，

$\therefore$线性回归方程为 $y=0.5x+50$．当 $y=115$ 时，$x=130$.

习题参考答案

第6章　数列

6.1　数列

【基础过关】

1.（1）16，32，$a_n=2^{n-1}$；　　（2）45，55，$a_n=10n-5$；

（3）25，36，$a_n=n^2$；　　（4）11111，111111，$a_n=\frac{1}{9}(10^n-1)$；

（5）$\frac{5}{6}$，$\frac{6}{7}$，$a_n=\frac{n}{n+1}$；　　（6）$-\frac{1}{4}$，$\frac{11}{49}$，$a_n=\frac{(-1)^n(2n-1)}{(n+1)^2}$；

（7）1，0，$a_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$；　　（8）35，48，$a_n=(n+1)^2-1$.

2. $a_1=-1$，$a_2=-\frac{2}{3}$，$a_3=\frac{1}{3}$，$a_4=-\frac{4}{17}$，$a_5=\frac{5}{27}$，$a_{10}=-\frac{10}{107}$.

【巩固提高】

一、强化训练

1.（1）1，3，3，5，5，…；　　（2）2，−6，12，−20，30，…；

（3）$\frac{2}{3}$，$\frac{4}{15}$，$\frac{6}{35}$，$\frac{8}{63}$，$\frac{10}{99}$，…；　　（4）1，2，$\frac{7}{3}$，$\frac{5}{2}$，$\frac{13}{5}$，….

2.（1）$a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$；　　（2）$a_n=\frac{(-1)^n(n+1)}{(n+1)^2-1}$；

（3）$a_n=(-1)^n(6n-5)$；　　（4）$a_n=2^n-1$；

（5）$a_n=\frac{n^2}{3}$；　　（6）$a_n=\frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}$.

3. $\frac{72}{17}$是第 6 项，2.5 不是这个数列中的项.

4. $a_n=-4n+8$.

5. 2，−2，−6，−10；$a_n=6-4n$.

6. $a_n=2n+1$; $a_{2013}=4027$.

7. $a_n=\begin{cases}0 & n=1\\ 2^n & n\geqslant 2\end{cases}$，$b_1=4$，$b_2=12$，$b_3=24$，$b_4=48$，$b_5=96$.

8. 解：$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$　从而有 $a_n=\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}$

$\because a_1=1$，$\therefore a_2=\frac{1}{3}$，$a_3=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}$，$a_4=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}$，$a_5=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}$

$\therefore a_n=\frac{(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1}{(n+1)n(n-1)\times\cdots\times5\times4\times3}=\frac{2}{n(n+1)}$　$\therefore S_n=n^2a_n=\frac{2n}{n+1}$.

二、能力拓展

9.（1）$a_n=\frac{7}{9}(10^n-1)$；　　（2）$a_n=1-\frac{1}{10^n}$.

10. $S_n=\frac{n}{n+1}$.

【高考链接】

B

6.2　等差数列（一）

【基础过关】

1.（1）是等差数列，$a_1=4$，$d=3$；　（2）不是等差数列；　（3）不是等差数列；

（4）不是等差数列；（5）是等差数列，$a_1=9$，$d=-3$；（6）是等差数列，$a_1=0$，$d=0$.

2.（1）4；　　（2）−1，−5；　　3. $a_{100}=4+(n-1)\times 3=301$；

4. 671 项，不是；　　5. 6

【巩固提高】

一、强化训练

1. $a_n=2n-3$；　　2. $a_{12}=15$；　　3. $n=50$；　　4. 三数位 2，4，6；

5. 证明：$\because \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}\Rightarrow\frac{a+c}{ac}=\frac{2}{b}\Rightarrow 2ac=b(a+c)$

又$\because \frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}=\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ac}=\frac{b(a+c)+a^2+c^2}{ac}$

$=\frac{2(a+c)^2}{b(a+c)}=\frac{2(a+c)}{b}$

$\therefore \frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$成等差数列.

二、能力拓展

6. $\frac{5}{2}$；　　7. 1；　　8. 0

【高考链接】

61

6.3　等差数列（二）

【基础过关】

1. 110，380；　　2. 21

【巩固提高】

一、强化训练

1.（1）$a_1=-38$，$S_n=-380$；　（2）$a_7=13$；　（3）$S_7=49$；　（4）$n=4$，$a_n=\frac{13}{3}$.

2. 当 n 为 8 时，S_n 最小；

3. 解：设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1<0$，$S_3=S_{11}$

$\therefore S_{11}-S_3=a_4+a_5+a_6+\cdots+a_{10}+a_{11}=0$，

$\therefore a_7+a_8=0$

$\therefore a_7<0$，$a_8>0$

$\therefore$当 $n=7$ 时，S_7有最小值.

4. 解：**方法一** 等差数列中，由 $S_n=48$，$S_{2n}=60$

$$\text{得}\begin{cases} S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d \\ S_{2n}=2na_1+\dfrac{2n(2n-1)}{2}d \end{cases}\text{即}\begin{cases} 48=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d & (1) \\ 60=2na_1+\dfrac{2n(2n-1)}{2}d & (2) \end{cases}$$

式（2）−式（1）得 $12=na_1+\dfrac{n(3n-1)}{2}d$

所以 $36=3na_1+\dfrac{3n(3n-1)}{2}d$.

方法二 $\because$数列$\{a_n\}$为等差数列

$\therefore S_n$，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$成等差数列；

$\therefore 2(S_{2n}-S_n)=S_n+S_{3n}-S_{2n}$

即 $2\times(60-48)=48+S_{3n}-60$

$\therefore S_{3n}=36$.

5. 23

6. 解：（1）$\because\begin{cases} S_{12}=\dfrac{12}{2}(a_1+a_{12})=6(a_6+a_7)>0 \\ S_{13}=\dfrac{13}{2}(a_1+a_{13})=13a_7<0 \end{cases}\therefore\begin{cases} a_6+a_7>0 \\ a_7<0 \end{cases}\therefore\begin{cases} 2a_1+11d>0 \\ a_1+6d<0 \\ a_1+2d=12 \end{cases}$

解得 $-\dfrac{24}{7}<d<-3$.

（2）由$\begin{cases} a_6+a_7>0 \\ a_7<0 \end{cases}$得$\begin{cases} a_6>0 \\ a_7<0 \end{cases}$

又$\because -\dfrac{24}{7}<d<-3$

$\therefore\{a_n\}$是递减数列

$\therefore S_1$，S_2，…，S_{12}中 S_6最大.

二、能力拓展

7. 当 n 为 5 时，S_5最小.

8. 解：令 $a_n=2n-33>0$，解得 $n>\dfrac{33}{2}$，

所以当 $n\leqslant 16$ 时，$a_n<0$，又 $a_1=2-33=-31$，

则数列$\{|a_n|\}$的前 n 项和 $S_n=-\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(-31+2n-33)}{2}=32n-n^2$；

当 $n\geqslant 17$ 时，$a_n>0$，

则数列$\{|a_n|\}$的前 n 项和 $S_n=S_{16}+S_{n-16}=\frac{16(1+31)}{2}+\frac{(n-16)(1+2n-33)}{2}=n^2-32n+512$，

综上所述，可得 $S_n=\begin{cases}32n-n^2 & (n\leqslant 16)\\ n^2-32n+512 & (n\geqslant 17)\end{cases}$.

【高考链接】

D

6.4 等比数列（一）

【基础过关】

1.（1）是；　　（2）不是；　　（3）是

2. $a_n=2\cdot 3^{n-1}$

3. $x=6$，$y=\frac{27}{2}$；　　$x=3\sqrt{3}$，$y=18-3\sqrt{3}$ 或 $x=-3\sqrt{3}$，$y=18+3\sqrt{3}$

【巩固提高】

一、强化训练

1. $a_6=-96$；　　2. $a_n=5\times 2^{n-1}$；　　3. 8 或 $\frac{1}{2}$；　　4. 81，27，9 或 −81，27，−9

二、能力拓展

5. 解：设这三个数为 $a-d$，a，$a+d$

则 $\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=18\\ (a-d+1)(a+d+17)=(a+3)^2\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=6\\ d=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=6\\ d=-20\end{cases}$

所以这三个数为：2，6，10 或 26，6，−14.

6. $q=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

【高考链接】

2

6.5 等比数列（二）

【基础过关】

1. $2^{n+1}-2$；　　2. $-\frac{1023}{128}$；　　3. 211 或 55；　　4. 364；　　5. 7

【巩固提高】

一、强化训练

1.（1）189；　　（2）$-\frac{61}{81}$；　　（3）$\frac{31}{2}$

2. $S_{3n}=43$

3. 解：据题意，当公比 $q=1$ 时，$S_6=2S_3$，与题意不符，故 $q\neq 1$

$\because S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=6$，$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=54$

$\therefore \frac{S_6}{S_3}=1+q^3=9$，解得 $q=2$.

4. $q=3$，$a_1=1$，$n=4$

二、能力拓展

5.（1）当 $q=2$ 时，$S_n=\frac{3}{2}-3\cdot 2^{n-1}$；当 $q=-2$ 时，$S_n=-\frac{1}{2}+(-1)^n\cdot 2^{n-1}$；

（2）$a_1=-2$，$a_n=-2^{2-n}$；

（3）当 $q=-4$ 时，$a_n=(-1)^{n-1}\cdot 2^{2n-1}$；当 $q=3$ 时，$a_n=2\cdot 3^{n-1}$.

6. 解：依题意 $2S_{n+2}=S_{n+1}+S_n$ 即 $2(S_{n+1}+a_{n+2})=S_{n+1}+(S_{n+1}-a_{n+1})$

$\therefore \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=-\frac{1}{2}$

$\therefore$数列$\{a_n\}$的公比为$-\frac{1}{2}$.

7. 解：设$\{a_n\}$的公差为 d，数列$\{b_n\}$的公比为 $q>0$，

由题意得$\begin{cases} 1+2d+3q^2=17 \\ 3q^2+3q+3-(3+3d)=12 \\ q>0 \end{cases}$，

解得 $q=2$，$d=2$

$\therefore a_n=1+2(n-1)=2n-1$，$bn=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$.

【高考链接】

（1）由题意得：

$2a_3=a_2+a_3-2,$

$a_1q^2-a_1q=-2,$ ①

又 $a_4=a_1q^3=1,$ ②

①÷②可得：$2q^2+q-1=0,$

所以 $q=\frac{1}{2}$ 或 $q=-1$（舍去）.

因为 $a_4=a_1q^3=1$ 所以 $a_1=8$，

从而 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{4-n}$.

（2）$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=16[1-(\frac{1}{2})^n],$

所以 $S_n=16[1-(\frac{1}{2})^n]<16.$

6.6 数列实际应用举例

【基础过关】

1. 512 个　　2. $y=54.8(1+x)^{16}$　　3. 820　　4. 16，20，24

【巩固提高】

一、强化训练

1. 120 个　　2. 8 年　　3. 80000　　4. 13.5 亿，1.1%

二、能力拓展

5.（1）535；（2）555，20756　　6. 2029.66

7. 甲方案总利润 16.68 万元，乙方案总利润 16.56 万元，甲方案获利较多.

【高考链接】

【剖析】本题是数列的应用问题，涉及等差数列的模型应用，总费用和年平均费用的获得，总费用=各项费用的和=购车费+保险养路及汽油费总和+维修总费用，年平均费用 $=\dfrac{\text{总费用}}{\text{年数}}$.

【解答】据题意，汽车的维修费用一次逐年递增成等差数列，以 0.3 为首项，0.3 为公差.

当使用 n 年时，维修总费用 $S_n=0.15n^2+0.15n$；

所以总费用 $T=15+1.2n+0.15n^2+0.15n=0.15n^2+1.35n+15$

$y_n=\dfrac{T}{n}=0.15n+1.35+\dfrac{15}{n}$（$n\in\mathbf{N}^*$，单位：万元）

答：汽车使用 n 年时，年平均费用 y_n（万元）的表达式为 $y_n=\dfrac{T}{n}=0.15n+1.35+\dfrac{15}{n}$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

本章小结与复习

【巩固提高】

一、强化训练

1. D

2. D

3. $S_n=2[1-(-\dfrac{1}{2})^n]=2-(-1)^n(\dfrac{1}{2})^{n-1}$

4. 已知 $S_n=\dfrac{5n^2-33n}{4}$ 或 $S_n=\dfrac{57n-5n^2}{4}$

5. 60

6.（1）$\{a_n+1\}$是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，证明略；（2）$a_n=2^n-1$.

7.（1）$\because\{a_n\}$为等比数列　$\therefore\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=q=$ 常数

$\therefore b_n-b_{n-1}=\log_{\frac{1}{2}}a_n-\log_{\frac{1}{2}}a_{n-1}=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\log_{\frac{1}{2}}q=$常数.

$\therefore$数列$\{b_n\}$为等差数列.

$\therefore b_2+b_4=2b_3$，由 $b_2+b_4=12$ 得

$\therefore b_3=6$.

又$\because b_3+b_5=16$　$\therefore b_5=10$

$\therefore d=\dfrac{b_5-b_3}{5-3}=2$

$\therefore b_1=2$.

$\therefore b_n=2n$.

（2）$S_{100}=\dfrac{100(2+200)}{2}=10100$.

二、能力拓展

8. 解：由 $a_5\cdot a_{2n-5}=a_n^2$

$\therefore a_n^2=2^{2n}$ 从而 $a_n=2^n$（负值已舍）

$\therefore a_1\cdot a_2\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\cdots\cdot 2^n=2^{1+2+3+\cdots+n}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$\therefore \log_2 a_1+\log_2 a_2+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_n=\log_2(a_1\cdot a_2\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n)=\log_2 2^{\frac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

9. 解：（1）$\because\{a_n\}$是首项为 19，公差为−4 的等差数列

$\therefore a_n=19-4(n-1)=-4n+23$.

$\because\{a_n\}$是首项为 19，公差为−4 的等差数列，其和为

$S_n=a_1n+\dfrac{n(n-1)}{2}d=19n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times(-4)=-2n^2+21n$.

（2）由题意$\{b_n-a_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列

$\therefore b_n-a_n=2^{n-1}$，所以 $b_n=a_n+2^{n-1}=2^{n-1}-4n+23$

$\therefore T_n=S_n+1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=-2n^2+21n+2^n-1$.

10.（1）证明略；（2）$a_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{8}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.

第 7 章　平面向量

7.1　平面向量的概念

【基础过关】

（1）×　（2）×　（3）×　（4）√　（5）√　（6）×

【巩固提高】

一、强化训练

1．A　2．A　3．D　4．B　5．共线　6．不共线

二、能力拓展

7．菱形　8．1

【高考链接】

D

7.2　平面向量的加法、减法和数乘向量（一）

【基础过关】

1．$\vec{0}$　2．$\vec{c},\ \vec{b},\ \vec{a}$　3．（1）$\overrightarrow{MS}$；（2）$\vec{0}$　4．$\vec{c}$，$\overrightarrow{f}$，$\overrightarrow{f}$，$\vec{g}$

【巩固提高】

一、强化训练

1．D　　2．B　　3．B　　4．13　　5．作图略

二、能力拓展

6．$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向　　7．$-\vec{f}$，$-\vec{e}$，$\vec{f}$，$\vec{0}$

7.3　平面向量的加法、减法和数乘向量（二）

【基础过关】

1．A　　2．（1）$-8\vec{a}+7\vec{b}$；（2）$2\vec{c}$　　3．作图略

【巩固提高】

一、强化训练

1．B　　2．A　　3．B　　4．$\vec{0}$

二、能力拓展

5．$-\frac{2}{3}$

6．证明略

7.4　平面向量的坐标运算

【基础过关】

1．C　　2．C　　3．1，10　　4．4，（−6，9）

【巩固提高】

一、强化训练

1．B　　2．C　　3．A　　4．$-\frac{7}{2}$　　5．$8\sqrt{2}$

6．解：依题意得

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$(-6,\ 8)=\frac{1}{2}(m-4,\ n+2)$$

$$m=-8,\ n=14.$$

二、能力拓展

7．解：设 $\vec{a}=(x,\ y)$，则

$$\begin{cases}|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{10}\\ 2x-y=0\end{cases}$$

$$x=\sqrt{2},\ y=2\sqrt{2} \text{ 或 } x=-\sqrt{2},\ y=-2\sqrt{2}$$

$$\therefore \vec{a}=(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}) \text{ 或 } \vec{a}=(-\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})$$

8．证明：$\because \overrightarrow{AB}=(3,\ 3)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,\ -2)$

$\therefore \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD},\ |\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{CD}|$

即 $AB // CD,\ AB \neq CD$

$\therefore ABCD$ 为梯形 .

【高考链接】

C

7.5 平面向量的内积（一）

【基础过关】

1．C　　2．D

【巩固提高】

一、强化训练

1．A　　2．B　　3．−4　　4．2　　5．−44

6．解：由（$\vec{a}-\vec{b}$）与 $\vec{a}$ 垂直，得

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=1$

$\cos<\vec{a},\ \vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$<\vec{a},\ \vec{b}>=45^\circ$

二、能力拓展

7．解：由 $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\lambda\vec{b}$ 垂直，得

$(\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot(\vec{a}-\lambda\vec{b})=0$

$\vec{a}^2-\lambda^2\vec{b}^2=0$

$9-25\lambda^2=0$

$\lambda=\pm\dfrac{3}{5}$

8．解：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=12$

$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})$

$=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{b}^2$

$=36-12-96=-72$

【高考链接】

C

7.6 平面向量的内积（二）

【基础过关】

1．C　　2．$\dfrac{1}{9}$　　3．（−4，−4）

【巩固提高】

一、强化训练

1．D　　2．A　　3．4　　4．（－3，6）　　5．45°

6．解：$\vec{a}=\overrightarrow{BC}=(-1,\ -1)$

$\vec{b}=\overrightarrow{CA}=(-1,\ 0)$

$$\cos<\vec{a},\ \vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$<\vec{a},\ \vec{b}>=45^{\circ}$$

二、能力拓展

7．解：（1）$(3\vec{a})\cdot\vec{b}=(9,\ -6)\cdot(-5,\ -1)=-45+6=-39$

（2）$\vec{a}-2\vec{b}=(13,\ 0)$

$$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{(\vec{a}-2\vec{b})^2}=13$$

8．解：$\vec{a}+x\vec{b}=(3+2x,\ 4-x)$

$\vec{a}-\vec{b}=(1,\ 5)$

由$(\vec{a}+x\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$，得

$3+2x+5(4-x)=0$

$$x=\frac{23}{3}$$

【高考链接】

A

本章小结与复习

【巩固训练】

一、强化训练

1．A　　2．（－1，3）　　3．3　　4．$-\frac{25}{3}$

二、能力拓展

5．解：设$\vec{x}=(m,\ n)$，则

$$\begin{cases}\vec{x}\cdot\vec{a}=9\\ \vec{x}\cdot\vec{b}=-4\end{cases}$$

$$\begin{cases}3m-n=9\\ m+2n=-4\end{cases}$$

$$\begin{cases}m=2\\ n=-3\end{cases}$$

6．解：设$D=(m,\ n)$，则

$\overrightarrow{AD}=(m-2,\ n-3)$

$\overrightarrow{AB}=(-3,\ 3)$

由 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$，得

$(m-2,\ n-3)=2(-3,\ 3)$

$m=-4,\ n=9$

$D=(-4,\ 9)$

$|CD|=\sqrt{(1+4)^2+(4-9)^2}=5\sqrt{2}$

第8章　直线与圆的方程

8.1　两点间的距离公式及中点公式

【基础过关】

1．5　　2．5　　3．(−2，0)

【巩固提高】

一、强化训练

1.（1）6；8；10；　　（2）(−3，4)；　　（3）$\left(\frac{1}{2},\ 3\right)$；　　（4）$\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$

2. 解：由平面内两点间的距离公式得

$|AB|=\sqrt{(4-m)^2+\left[7-(-1)\right]^2}=10$

解得 $m=-2$ 或 $m=10$.

3. 解：设 B 点的坐标为(x，y)，由中点坐标公式得

$5=\frac{6+x}{2}$，$-3=\frac{y+(-4)}{2}$　解得 $\begin{cases}x=4\\y=-2\end{cases}$

即 B 点的坐标为(4，−2)

再由两点间距离公式，得

$|AB|=\sqrt{(6-4)^2+\left[-4-(-2)\right]^2}=2\sqrt{2}$.

4. 解：$|AB|=\sqrt{\left[-5-(-1)\right]^2+(1-1)^2}=4$，$|BC|=\sqrt{\left[-1-(-1)\right]^2+(1-4)^2}=3$

$|AC|=\sqrt{\left[-5-(-1)\right]^2+(1-4)^2}=5$

$\because |AB|^2+|BC|^2=|AC|^2$

$\therefore$△ ABC 为直角三角形.

5. 解：方法一　设点 $P(x,\ 0)$，以下步骤由学生完成

$|PA|=\sqrt{x^2+2x+5}$，$|PB|=\sqrt{x^2-4x+11}$

由 $|PA|=|PB|$ 得：$x^2+2x+5=x^2-4x+11$

解出：$x=1$

$\therefore$所求点 $P(1,\ 0)$，$|PA|=2\sqrt{2}$.

方法二（由学生探究）由几何方法：作线段 AB 的中垂线 l，求出中垂线 l 的方程，再令 $y=0$，可求点 P 及 $|PA|$ 的值.

6. $A_1(11, -9)$

二、能力拓展

7. 解：设点 C 的坐标为 $(a, 0)$，点 B 的坐标为 $(0, b)$

∵△ ABC 为等边三角形

∴点 $A(0, 5)$ 与点 B 关于原点 O 对称，即点 B 的坐标为 $(0, -5)$

∴ $|AB|=|AC|=10$

∴ $|AC|=\sqrt{(0-a)^2+(5-0)^2}=10$，解得 $a=\pm 5\sqrt{3}$，即点 C 的坐标为 $(5\sqrt{3}, 0)$ 或 $(-5\sqrt{3}, 0)$.

8. 解：设顶点 D 的坐标为 (x, y)，平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 的交点为 O

∴ $A(-2, 1)$ 和 $C(4, 5)$ 的中点坐标 $O(1, 3)$，同时 $O(1, 3)$ 也为 $B(-1, 5)$ 和 D 的中点坐标

∴顶点 D 的坐标为 $(3, 1)$.

【高考链接】

$m=7$，$n=1$

8.2 直线的倾斜角和斜率

【基础过关】

1. 由于两点确定一条直线，所以在直线上任意找两点即可.

2. $\tan 0^\circ=0$，$\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan 45^\circ=1$，$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$，

$\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$，$\tan 135^\circ=-1$，$\tan 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3.（1）$\sqrt{3}$；（2）45°

【巩固提高】

一、强化训练

1.（1）$-\sqrt{3}$，120°；　（2）$\sqrt{3}$，60°；　（3）$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，150°

2. 必要不充分；直线不垂直于 x 轴（答案不唯一）

3. -1，135°　　4. -1

5. 解：∵ $k_{AB}=k_{AC}=2$

∴ $\frac{5-7}{x-3}=\frac{y-7}{-1-3}=2$

∴ $x=2$，$y=-1$.

6. 解：直线 AB 的斜率 $k_{AB}=-\frac{2}{5}<0$，所以直线 AB 的倾斜角是钝角；

直线 BC 的斜率 $k_{BC}=\dfrac{3}{5}>0$，所以直线 BC 的倾斜角是锐角；

直线 AC 的斜率 k_{AC} 不存在，所以直线 AC 的倾斜角是直角.

二、能力拓展

7. 解：$k_{MN}=k_{MP}\Rightarrow\dfrac{-3-3}{2-4}=\dfrac{\dfrac{m}{2}-3}{5-4}\Rightarrow m=12$.

8. 解：∵ $\tan\alpha=k=1-m^2\leqslant 1$，又 $\alpha\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$.

【高考链接】

B

8.3 直线的方程（一）

【基础过关】

1. 需要知道直线经过两个已知点；需要知道直线经过一个已知点及方向（即斜率）等.

2.（1）$y=-5x+2$　　（2）2，5

（3）$y=\dfrac{1}{2}x-3$　　（4）$\dfrac{2}{3}$

【巩固提高】

一、强化训练

1. D　　2. B　　3. $x+y-1=0$

4. $(-2,\ 4)$，2　　5. $3\sqrt{2}$

6. 解：设 $A(a,\ 0)$，$B(0,\ b)$，则 AB 的中点为 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$

而线段 AB 中点恰是 $P(-2,\ 3)$　∴ $a=-4$，$b=6$

由截距式方程得 $\dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{6}=1$

所求直线方程为 $3x-2y+12=0$.

二、能力拓展

7. 解：当横、纵截距都为 0 时，设直线的方程为 $y=kx$

∵直线过点 $P(-4,\ 2)$

∴ $2=-4k$，即 $k=-\dfrac{1}{2}$　∴直线方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x$

当横、纵截距都不为 0 时，设直线的方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}=1$

∵直线过点 $P(-4,\ 2)$

∴ $-4+2=a$，即 $a=-2$　∴直线方程为 $x+y=-2$

所求直线方程为 $x+2y=0$ 或 $x+y+2=0$.

8. 解：设 AB、BC、AC 边上中点分别为 E、F、G.

则根据中点公式得 $E\left(\frac{5}{2},\ -4\right)$、$F\left(\frac{1}{2},\ -3\right)$、$G(1,\ -1)$

∴中线 EC 的方程为 $\frac{x+1}{\frac{5}{2}+1}=\frac{y-0}{-4-0}$，即 $8x+7y+8=0$

中线 AF 的方程为 $\frac{x-3}{\frac{1}{2}-3}=\frac{y+2}{-3+2}$，即 $2x-5y-16=0$

中线 BG 的方程为 $\frac{x-2}{1-2}=\frac{y+6}{-1+6}$，即 $5x+y-4=0$.

【高考链接】

B

8.4 直线的方程（二）

【基础过关】

1. 0　　2. $5x+3y+15=0$　　3. $y=\frac{1}{3}x+2$，$k=\frac{1}{3}$，横截距 -6、纵截距 2.

【巩固提高】

一、强化训练

1. B　　2. B　　3. C

4. $\frac{x-3}{5-3}=\frac{y+1}{4+1}$，$5x-2y-17=0$，$\frac{x}{\frac{17}{5}}+\frac{y}{\frac{17}{-2}}=1$，$y=\frac{5}{2}x-\frac{17}{2}$

5. $3x+2y+6=0$

6. 解：AB 所在直线的方程，由两点式得

$\frac{y-0}{-3-0}=\frac{x-(-5)}{3-(-5)}$，即 $3x+8y+15=0$.

BC 所在直线的方程，由斜截式，得 $y=-\frac{5}{3}x+2$，即 $5x+3y-6=0$.

AC 所在直线的方程，由截距式，得 $\frac{x}{-5}+\frac{y}{2}=1$，即 $2x-5y+10=0$.

二、能力拓展

7. 解：设直线为 $y+4=k(x+5)$，交 x 轴于点 $(\frac{4}{k}-5,\ 0)$，交 y 轴于点 $(0,\ 5k-4)$，

$S=\frac{1}{2}\times\left|\frac{4}{k}-5\right|\times|5k-4|=5$　　$\left|40-\frac{16}{k}-25k\right|=10$

得 $25k^2-30k+16=0$ 或 $25k^2-50k+16=0$

解得 $k=\frac{2}{5}$ 或 $k=\frac{8}{5}$

∴ $2x-5y-10=0$ 或 $8x-5y+20=0$ 即为所求.

8. 解：∵点 $(3,\ -1)$ 在直线 l_1 上

$\therefore b=10$，则 l_1 的方程 $y=3x-10$

$\because \tan\alpha_1=3$，由 $\alpha_1+\alpha_2=\dfrac{\pi}{2}$ 得 $\alpha_2=\dfrac{\pi}{2}-\alpha_1$

$\therefore \tan\alpha_2=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha_1\right)=\cot\alpha_1=\dfrac{1}{\tan\alpha_1}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore l_2$ 的方程为 $y+1=\dfrac{1}{3}(x-3)$，即 $x-3y-6=0$.

【高考链接】

C

8.5 两直线的位置关系（一）

【基础过关】

1.（1）平行；（2）平行；（3）相交、交点 $(-2,-1)$；（4）平行　　2. 1

【巩固提高】

一、强化训练

1. C　　2. D　　3. D

4. $x+2y+7=0$　　5. $5x-12y-24=0$

6. 解：由题意得 $k_{AB}=\dfrac{-5-2}{-1-1}=\dfrac{7}{2}$，由点斜式方程得 $y-(-3)=\dfrac{7}{2}(x-2)$

∴所求直线方程为 $7x-2y-20=0$.

二、能力拓展

7. 解：由 $\begin{cases}x+y+1=0\\5x-y-1=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$，即交点坐标为 $(0,-1)$

设所求直线方程为 $3x+2y+m=0(m\neq 1)$，则 $0+2\times(-1)+m=0$，即 $m=2$

∴所求直线方程为 $3x+2y+2=0$.

8. 解：设直线的方程为 $2x+3y+m=0$ $(m\neq 5)$，令 $x=0$，则在 y 轴上的截距为 $b=-\dfrac{m}{3}$；

令 $y=0$，则在 x 轴上的截距为 $a=-\dfrac{m}{2}$

由 $a+b=-\dfrac{m}{2}-\dfrac{m}{3}=\dfrac{5}{6}$ 得 $m=-1$　∴所求直线方程为 $2x+3y-1=0$.

【高考链接】

B

8.6 两直线的位置关系（二）

【基础过关】

1. 垂直　　2. 垂直　　3. 垂直

【巩固提高】

一、强化训练

1. B　　2. $y=\frac{1}{3}$　　3. 10，-12，-2

4. $x+2y+3=0$　　5. $3x-y+4=0$

6. 解：由题意得：直线 $OP\perp l$，且 $k_{OP}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$，则直线 l 的斜率为 $k=-\frac{1}{k_{OP}}=2$

$\therefore$ 由点斜式方程得 $y-2=2(x+4)$

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $2x-y+10=0$.

二、能力拓展

7. 解：AB 边所在直线的斜率 $k_{AB}=-\frac{1}{2}$，BC 边所在直线的斜率 $k_{BC}=2$，

$\because k_{AB}\cdot k_{BC}=-1$

$\therefore AB\perp BC$，即 $\angle ABC=90^{\circ}$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

8. 解：可设所求直线方程为 $4x+3y+m=0$，则

$$\left|-\frac{m}{4}\right|+\left|-\frac{m}{3}\right|+\sqrt{\left(-\frac{m}{4}\right)^2+\left(-\frac{m}{3}\right)^2}=10$$

$\therefore m=\pm 10$，故所求直线方程为 $4x+3y\pm 10=0$.

【高考链接】

B

8.7　点到直线的距离公式

【基础过关】

1. 2　　2. $2\sqrt{2}$　　3. 9

【巩固提高】

一、强化训练

1. B　　2. D　　3. B　　4. $\frac{14}{13}\sqrt{13}$

5. 4　　6. $x=5$ 或 $3x-4y+25=0$

7. 解：设所求直线的方程为 $y-1=k(x+2)$，即 $kx-y+2k+1=0$

$$\therefore \frac{|k\times(-1)-2+2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|k\times 3-0+2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}$$

$\therefore k=0$ 或 $k=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ 所求直线的方程为 $y=1$ 或 $x+2y=0$.

二、能力拓展

8. 解：设点 P 的坐标为 $(-3m,\ m)$，则

$\sqrt{(-3m)^2+m^2}=\dfrac{|-3m+3m-2|}{\sqrt{1^2+3^2}}$，解得 $m=\pm\dfrac{1}{5}$

∴点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{1}{5}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$.

9. 解：设 A' 的坐标为 $(a,\ b)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{b-4}{a+3}\times 4=-1\\ \dfrac{|4a-b-1|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\dfrac{|4\times(-3)-4-1|}{\sqrt{4^2+1^2}}\end{cases}\text{，解得}\begin{cases}a=5\\ b=2\end{cases}$$

∴所求的对称点 $A'(5,\ 2)$.

【高考链接】

A

8.8 圆的方程（一）

【基础过关】

1.（1）圆心 $(3,\ 2)$，$r=\sqrt{5}$　　（2）圆心 $(-4,\ -1)$，$r=\sqrt{7}$

（3）圆心 $(-2,\ 0)$，$r=2$　　（4）圆心 $(0,\ 0)$，$r=5$

2.（1）$x^2+y^2=9$　　（2）$(x-3)^2+(y+3)^2=4$

3. $(x-3)^2+(y-4)^2=25$

【巩固提高】

一、强化训练

1. B　　2. A　　3. C　　4. C　　5. C

6. 解：∵圆心在 x 轴上

∴设圆的方程为 $(x-a)^2+y^2=r^2$，则

$$\begin{cases}(3-a)^2+5^2=r^2\\ (-3-a)^2+7^2=r^2\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=-2\\ r^2=50\end{cases}$$

∴所求的圆的标准方程为：$(x+2)^2+y^2=50$.

二、能力拓展

7. D

8. 解：设圆心坐标为 $(a,\ b)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{b-2}{a-2}=\dfrac{3}{2}\\ (a-2)^2+(b-2)^2=(a+3)^2+(b-1)^2\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=0\\ b=-1\end{cases}$$

∴ $r^2=4+9=13$

∴所求的圆的标准方程为 $x^2+(y+1)^2=13$.

【高考链接】

6

8.9 圆的方程（二）

【基础过关】

1. （1）圆心$(-2,\ 0)$，$r=2$　　（2）圆心$(0,\ 3)$，$r=3$

（3）圆心$(a,\ 0)$，$r=|a|$　　（4）圆心$(0,\ -3b)$，$r=3|b|$

2. 解：（1）此方程表示一个点$O(0,\ 0)$

（2）可化为：$(x-1)^2+(y+2)^2=11$

∴此方程表示以点$(1,-2)$为圆心，$\sqrt{11}$为半径的圆.

3. 解：设所求圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. 则

$$\begin{cases}4+4+2D+2E+F=0\\25+9+5D+3E+F=0\\9+1+3D-E+F=0\end{cases}\quad\text{解得}\begin{cases}D=-8\\E=-2\\F=12\end{cases}$$

∴圆的方程为$x^2+y^2-8x-2y+12=0$.

【巩固提高】

一、强化训练

1. A　　2. D　　3. B　　4. D

5. $x-y-2=0$　　6. $x^2+y^2+2x-4y=0$

二、能力拓展

7. 解：设所求圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

∵所求圆过原点

∴$F=0$，方程可记为$x^2+y^2+Dx+Ey=0$

令$x=0$，则$y^2+Ey=0$　∴$y_1=0$，$y_2=-E$

∴$|y_1-y_2|=3=|E|$，即$E=\pm3$

又所求圆过点$A(-2,\ 1)$即$5-2D+E=0$

∴$\begin{cases}D=4\\E=3\end{cases}$或$\begin{cases}D=1\\E=-3\end{cases}$

∴所求圆的方程$x^2+y^2+4x+3y=0$或$x^2+y^2+x-3y=0$.

8. 解：设圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

由$BC\perp l$，点$A(-2,\ -4)$、$B(8,\ 6)$在圆上，得

$$\begin{cases}(-2)^2+(-4)^2+(-2)D+(-4)E+F=0\\8^2+6^2+8D+6E+F=0\\\dfrac{-\frac{E}{2}-6}{-\frac{D}{2}-8}\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-1\end{cases}$$

整理得 $\begin{cases}2D+4E-F=20\\8D+6E+F=-100\\3D-E=-36\end{cases}$，解得 $\begin{cases}D=-11\\E=3\\F=-30\end{cases}$

∴圆的方程为 $x^2+y^2-11x+3y-30=0$.

【高考链接】

（2，-3）

8.10 直线和圆的位置关系（一）

【基础过关】

1. 相切，相交，相离　　2. 相离　　3. 相切

【巩固提高】

一、强化训练

1. C　　2. A　　3. $x+\sqrt{2}y-6=0$

4. ±2　　5. 3　　6. $\sqrt{29}$

7. 解：圆心到直线 $3x-4y-10=0$ 的距离 $d=\dfrac{|-10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$

所以圆上一点 P 到直线 $3x-4y-10=0$ 的距离的最小值是 $2-1=1$.

二、能力拓展

8. 解：当直线 l 垂直于 x 轴时，直线 l：$x=-1$ 与圆相离，不满足条件.

当直线 l 不垂直于 x 轴时，可设直线 l 的方程为 $y-4=k(x+1)$，即 $kx-y+k+4=0$

∵直线 l 与圆 C 相切

∴圆心 $(2,\ 3)$ 到直线 l 的距离等于圆的半径

∴ $d=\dfrac{|2k-3+k+4|}{\sqrt{1+k^2}}=1$　解得：$k=0$ 或 $k=-\dfrac{3}{4}$

∴所求切线方程为 $y=4$ 和 $3x+4y-13=0$.

9. 解：由题意得，圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y+2)^2=1$，它关于 x 轴的对称圆的方程是 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$. 设光线 l 所在的直线的方程是 $y+3=k(x+3)$（其中斜率 k 待定），由题设知对称圆的圆心 $C'(2,\ 2)$ 到这条直线的距离等于 1，即 $d=\dfrac{|5k-5|}{\sqrt{1+k^2}}=1$.

整理得 $12k^2-25k+12=0$，解得 $k=\dfrac{3}{4}$ 或 $k=\dfrac{4}{3}$.

故所求直线方程是 $y+3=\dfrac{3}{4}$（$x+3$）或 $y+3=\dfrac{4}{3}$（$x+3$）

即 $3x-4y-3=0$ 或 $4x-3y+3=0$.

【高考链接】

D

8.11 直线和圆的位置关系（二）

【基础过关】

1. $\sqrt{2}+4$　　2. $x=1$　　3. 8

【巩固提高】

一、强化训练

1. 8　　2. $x+y-3=0$　　3. 2 或 4　　4. 0 或 $\frac{12}{5}$　　5. $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

6. 解：由题意得：圆心 $C(0,\ -2)$，半径 $r=4$ 且直线 $AB\perp MC$

$\because k_{MC}=\frac{-2-(-3)}{0-1}=-1$　　$\therefore k_{AB}=1$

$\therefore$直线 AB 的方程为 $y-(-3)=1\times(x-1)$　即 $x-y-4=0$.

二、能力拓展

7. 解：设直线 l 的方程为：$y=k(x-4)$，即 $kx-y-4k=0$

$\therefore$圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\sqrt{2^2-(\frac{2\sqrt{3}}{2})^2}=1$，

结合点到直线距离公式，得：$\frac{|-3k-1-4k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，

化简得：$24k^2+7k=0$，解得：$k=0$ 或 $k=-\frac{7}{24}$

所求直线 l 的方程为：$y=0$ 或 $y=-\frac{7}{24}(x-4)$，即 $y=0$ 或 $7x+24y-28=0$.

8. 解：设所求圆 C 的方程为 $(x-a)^2+y^2=r^2\ (a>0)$，则

$$\begin{cases}(1-a)^2=r^2\\ \frac{|a-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{r^2-\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2}\end{cases}$$　解得：$\begin{cases}a=3\\ r=2\end{cases}$

$\therefore$所求圆 C 的方程为 $(x-3)^2+y^2=4$.

【高考链接】

D

8.12 直线与圆的方程应用举例

【基础过关】

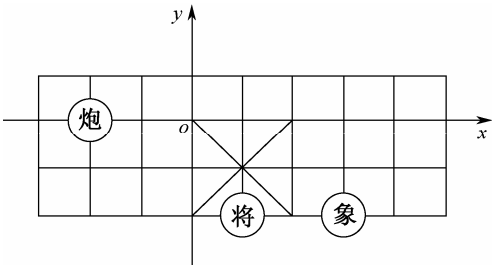
1. 解：（1）$A(-1,\ 3)$；$B(-4,\ 2)$；

（2）由题意知 $M(1,\ 2)$ 且直线 MN 过坐标原点

得直线 MN 的方程为 $y=2x$

$\therefore$直线 MN 的方程为 $2x-y=0$.

2. 解：$\therefore$“炮”的坐标为 $(-2,\ 0)$.



3. 解：如图 8-12-3 所示，易知弯道所在的圆的圆心坐标为 $C(0,\ 43.48)$，半径 $r=36$

所以弯道所在圆的方程是 $x^2+(y-43.48)^2=36^2$.

【巩固提高】

一、强化训练

1. A　　2. B　　3. C　　4. B　　5. D

6. 解：以公路所在的直线为 x 轴，过 A 点作公路的垂线作为 y 轴，建立坐标系. 过 B 点作 $BD\perp x$ 轴，过 A 作 $AD\perp BD$，垂足为 D. 则 $A(0,\ 1)$，$|BD|=2$，$|AB|=2\sqrt{2}$，则 $|AD|=2$，则 $B(2,\ 3)$，B 点关于 x 轴的对称点为 $B'(2,\ -3)$，连接 AB' 交 x 轴于 C，AB'：$2x+y-1=0$，令 $y=0$ 得 $C(0.5,\ 0)$，设 C' 为 x 轴上不同于 C 的任意点，则 $|BC'|=|B'C'|$，$|AC'|+|BC'|=|AC'|+|B'C'|>|AB'|=|AC|+|CB'|=|AC|+|CB|$

$\therefore C$ 点即为所求点.

故车站应选在过 A 村庄作公路的垂线，距垂足 0.5km 处（在 B 村庄一侧）.

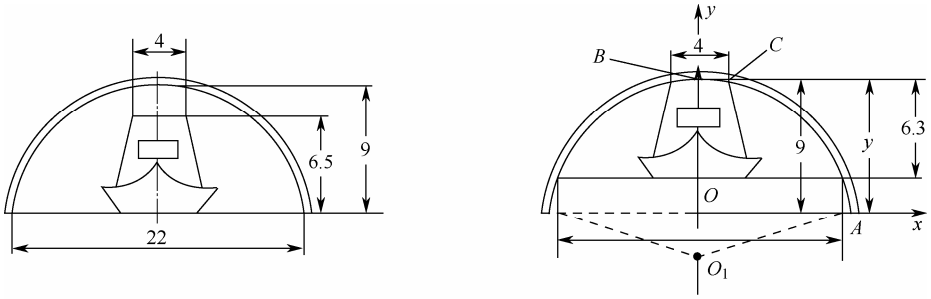
二、能力拓展

7. 解：$\because$圆心在 y 轴上

$\therefore$圆心坐标 $(0,\ b)$ 设圆的方程为 $x^2+(y-b)^2=r^2$ 之后把点 $(10,\ 0)$，$(0,\ 4)$ 代入可求出圆的方程圆的方程为 $x^2+(y-10.5)^2=14.5^2$ 之后把 $x=5$ 代入圆的方程可求出 $y=3.1>3$

$\therefore$船可通过.

8. 解：画出正常水位时的桥、船的示意图如答题图 8-12-2（a）所示；涨水后桥、船的示意图如答题图 8-12-2（b）所示. 以正常水位时河道中央为原点，建立如答题图 8-12-2（b）所示的坐标系.



（a）　　（b）

答题图 8-12-2

设桥拱圆顶的圆心$O_1(0,\ y_1)$，桥拱半径为r，则桥拱圆顶在坐标系中的方程为$x^2+(y-y_1)^2=r^2$.

桥拱最高点B的坐标为$(0,\ 9)$，桥拱与原始水线的交点A的坐标为$(11,\ 0)$. 圆O_1过点A，B，

因此$0^2+(9-y_1)^2=r^2$，$11^2+(0-y_1)^2=r^2$，

两式相减后得$121+18y_1-81=0$，$y_1=-\dfrac{20}{9}\approx-2.22$；

回代到两个方程之一，即可解出$r\approx11.22$.

所以桥拱圆顶的方程是$x^2+(y+2.22)^2=125.94$.

当船行驶在河道的正中央时，船顶最宽处角点C的坐标为$(2,\ y)$. 使船能通过桥洞的最低要求，是点C正好在圆O_1上，即$2^2+(y+2.22)^2=125.94$，解出$y\approx8.82$.

扣除水面上涨的2.70，点C距水面为$8.82-2.70=6.12$.

∴船身在水面以上原高6.5，为使船能通过桥洞，应降低船身$6.5-6.12=0.38$m 以上.

【高考链接】

C

本章小结与复习

【巩固训练】

一、强化训练

1. D　　2. C　　3. $2x-y+6=0$或$2x-y-4=0$　　4. 0 或$-\dfrac{4}{3}$

5. 解：（1）求得圆心$(0,\ 0)$到直线l：$x-y+4=0$的距离$d=2\sqrt{2}$，则

∵圆C上恰有一点到l的距离等于 1

∴$r=2\sqrt{2}-1$

∵圆C上恰有两点到l的距离等于 1

∴$2\sqrt{2}-1<r<2\sqrt{2}+1$

∵圆C上恰有三点到l的距离等于 1

∴$r=2\sqrt{2}+1$

（2）最多有四个点.

6. 解：∵点$P(2,\ 4)$不在圆O上，

若切线PT的斜率存在，则可设直线方程为$y=k(x-2)+4$，根据$d=r$

∴ $\dfrac{|-2k+4|}{\sqrt{1+k^2}}=2$　　解得$k=\dfrac{3}{4}$

所以$y=\dfrac{3}{4}(x-2)+4$　即$3x-4y+10=0$

因为过圆外一点作圆得切线应该有两条，可见另一条直线的斜率不存在. 易求另一条切线为$x=2$.

二、能力拓展

7. 解：设所求圆 C 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，则

∵圆 C 与 y 轴相切，圆心在直线 $x-3y=0$ 上

∴ $|a|=|r|$， $a=3b$

∴圆 C 的方程为 $(x-3b)^2+(y-b)^2=b^2$，即圆心坐标 $(3b,\ b)$

∴ $\left(\frac{4\sqrt{7}}{2}\right)^2=(3b)^2-\left(\frac{|3b-b|}{\sqrt{2}}\right)^2$ 解得： $b=\pm 2$

∴所求圆 C 的方程为 $(x-6)^2+(y-2)^2=36$ 或 $(x+6)^2+(y+2)^2=36$.

8. 解：以 AB 中点 M 为原点，建立平面直角坐标系，由已知有 $A(-3,\ 0)$，$B(3,\ 0)$，$N(0,\ 1)$.

设过 A，B，N 的圆的方程为： $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

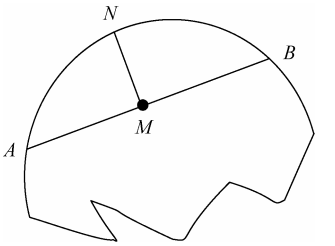
代入 A，B，N 的坐标，可得

$$\begin{cases}9-3D+F=0\\9+3D+F=0\\1+E+F=0\end{cases}\quad\text{解得}\begin{cases}D=0\\E=8\\F=-9\end{cases}$$

因此所求圆的方程为 $x^2+y^2+8y-9=0$

化为标准方程是 $x^2+(y+4)^2=25$

所以这个零件的半径为 5cm.



第9章　立体几何

9.1　平面的基本性质

【基础过关】

1. ×　×　×　×　　2. $\alpha\cap\beta=l$　　3. D

【巩固提高】

一、强化训练

1. C　　2. B　　3.D　　4.C　　5. B

6. 2；3 或 4；4 或 6 或 7 或 8

7. 证明：（1）设 $\beta\cap\gamma=a$，$\alpha\cap\gamma=b$，$\alpha\cap\beta=c$　　∴ $a\cap b=\{P\}$

则 $P\in\alpha$，$P\in\beta$　　∴ $P\in\alpha\cap\beta=c$　　∴ a、b、c 三线共点于 P.

（2）假设 a，c 不平行，∵ a，c 共面 ∴可设 $a\cap c=\{P\}$

由（1）可知：a、b、c 三线共点于 P，与已知条件 $a//b$ 矛盾

∴ $a//c$　　∴ a、b、c 互相平行.

二、能力拓展

8. 证明：∵直线 $EF\cap$ 直线 $GH=\{P\}$，∴ $P\in$ 直线 EF，而 $EF\subset$ 平面 ABD，

∴ $P\in$ 平面 ABD

同理，$P \in$ 平面 CBD，即点 P 是平面 ABD 和平面 CBD 的公共点. 显然，点 B、D 也是平面 ABD 和平面 CBD 的公共点，由公理 2 知，点 B、D、P 都在平面 ABD 和平面 CBD 的交线上，即点 B、D、P 在同一条直线上.

9.2 空间两条直线的位置关系

【基础过关】

1. C　　2. C　　3. 四边形 $EFGH$ 是平行四边形

【巩固提高】

一、强化训练

1. D　　2. D　　3. B　　4. 1　　5. $\dfrac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}$，$90°$　　6. $45°$

7. 证明：$\because E$、F 分别 AB、DA 的中点　$\therefore EF // BD$，$EF=\dfrac{1}{2}BD$

又 $\because \dfrac{CG}{CB}=\dfrac{CH}{CD}=\dfrac{3}{4}$　$\therefore GH // BD$，$GH=\dfrac{3}{4}BD$

$\therefore EF // GH$，$EF=\dfrac{2}{3}GH$　$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是梯形.

二、能力拓展

8. 解：取 AD 的中点 E，连接 ME，NE

则 $ME // BD$ 且 $ME=6$　　$NE // AC$　且 $NE=8$

$\therefore$ 异面直线 AC 与 BD 所成的角为 ME 与 NE 所成的角.

在 $\triangle MEN$ 中，$ME^2+NE^2=MN^2$　$\therefore ME \perp NE$

$\therefore$ 异面直线 AC 与 BD 所成的角为 $90°$.

【高考链接】

D

9.3 直线与平面的位置关系（一）

【基础过关】

1. D　　2.C

3. 证明：$\because EH // FG$，$EH \not\subset$ 平面 BCD，$FG \subset$ 平面 BCD

$\therefore EH //$ 平面 BCD

又 $\because EH \subset$ 平面 BCD，平面 $BCD \cap$ 平面 $ABD=BD$

$\therefore EH // BD$.

【巩固提高】

一、强化训练

1. D　　2. A　　3. D　　4. C　　5. 必要

6. 证明：$\because AP=AC$，D 为 PC 的中点

$\therefore AD \perp PC$.

同理 $BD \perp PC$，又 $\because AD \cap BD=\{D\}$　$\therefore PC \perp$ 平面 ABD.

二、能力拓展

7. 提示：（1）取 PD 的中点 E，连接 AE，EN，证明 $MN // AE$；

（2）证明 $AB \perp$ 平面 PAD；

（3）证明 $MN \perp PD$，又 $MN \perp CD$，从而 $MN \perp$ 平面 PCD.

【高考链接】

证明：因为 S 在平面 ABC 内的射影为 O，

所以 $SO \perp$ 平面 ABC，

故 SC 在平面 ABC 内的射影为 CO，

因为△ABC 为等边三角形，CD 为 $\angle ACB$ 的平分线，

所以 $AB \perp CD$，又由于 O 在 CD 上，所以 $AB \perp CO$，

从而 $AB \perp SC$.

9.4 直线与平面的位置关系（二）

【基础过关】

1. √ × × √ √ × 2. ①②④ 3. 8

【巩固提高】

一、强化训练

1. 6 2. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 3. B 4. D 5. D

6. 证明：∵ $EA \perp \alpha$，$CD \subset \alpha$ ∴ $EA \perp CD$

同理，$EB \perp CD$ $EA \cap EB = \{E\}$

∴ $CD \perp$ 平面 EAB

$AB \subset$ 平面 EAB，又 $CD \perp$ 平面 EAB，故 $CD \perp$ 直线 AB.

二、能力拓展

7. 证明：（1）在△ADE 中，$AD^2 = AE^2 + DE^2$，∴ $AE \perp DE$

∵ $PA \perp$ 平面 $ABCD$，$DE \subset$ 平面 $ABCD$，∴ $PA \perp DE$

又 $PA \cap AE = A$，∴ $DE \perp$ 平面 PAE.

（2）$\angle DPE$ 为 DP 与平面 PAE 所成的角

在 Rt△PAD，$PD = 4\sqrt{2}$，在 Rt△DCE 中，$DE = 2\sqrt{2}$

在 Rt△DEP 中，$PD = 2DE$，∴ $\angle DPE = 30^\circ$.

【高考链接】

（1）证明：在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，△ABC 为等边三角形，

因为 D 为 AC 的中点，所以 $BD \perp AC$，又∵ $BD \perp AA_1$，$AA_1 \cap AC = \{A\}$

所以 $BD \perp$ 平面 A_1ACC_1，从而 $BD \perp A_1D$.

（2）解：由（1）得：$BD \perp$ 平面 A_1ACC_1，所以 A_1D 为 BA_1 在平面 AA_1C_1C 内的射影，

所以 $\angle BA_1D$ 即为直线 BA_1 与平面 A_1ACC_1 所成角

在 Rt△A_1BD 中，$BD = \sqrt{3}$，$A_1D = \sqrt{5}$.

所以 $\tan\angle BA_1D=\dfrac{BD}{A_1D}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

所以 $\angle BA_1D=37.8^\circ$.

9.5 平面与平面的位置关系（一）

【基础过关】

1. ①②③　　2. 平行　　3. 略

【巩固提高】

一、强化训练

1. D　　2. C　　3. D　　4. A　　5. B　　6. 20

二、能力拓展

7. 证明：∵ E、F 分别是 AB、AD 的中点　∴ EF // BD

又 $EF\not\subset$ 平面 BDG，$BD\subset$ 平面 BDG　∴ EF // 平面 BDG

∵ $D_1G\parallel EB$ ∴四边形 D_1GBE 为平行四边形，D_1E // GB

又 $D_1E\not\subset$ 平面 BDG，$GB\subset$ 平面 BDG　∴ D_1E // 平面 BDG

$EF\cap D_1E=\{E\}$，∴平面 D_1EF // 平面 BDG.

【高考链接】

A

9.6 平面与平面的位置关系（二）

【基础过关】

1. A　　2. C　　3. C

【巩固提高】

一、强化训练

1. D　　2. C　　3. B　　4. C　　5. $\dfrac{1}{3}$　　6. 60°

7. 略证：（1）由 E，F 分别 A_1B，A_1C 是的中点知 EF // BC，

故 EF // 平面 ABC.

（2）易知，$BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，∴ $BB_1\perp A_1D$

又 $A_1D\perp B_1C$，∴ $A_1D\perp$ 平面 BB_1C_1C

而 $A_1D\subset$ 平面 A_1FD，∴平面 $A_1FD\perp$ 平面 BB_1C_1C.

二、能力拓展

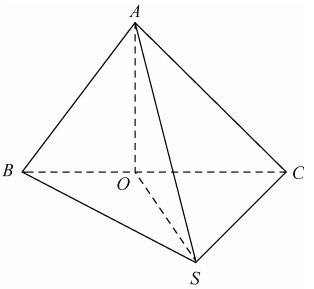
8. 证明：∵ $SB=SA=SC$，$\angle ASB=\angle ASC=60^\circ$

∴ $SA=AB=AC$

取 BC 的中点 O，连 SO，AO，则

$SO\perp BC$，$AO\perp BC$

∴ $\angle AOS$ 为二面角 $S-BC-A$ 的平面角



设 $SA=SB=SC=a$，又 $\angle BSC=90^\circ$

$\therefore BC=\sqrt{2}a$，$SO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$

$AO^2=AC^2-OC^2=a^2-\dfrac{1}{2}a^2=\dfrac{1}{2}a^2$　$\therefore SA^2=AO^2+OS^2$　$\therefore \angle AOS=90^\circ$，

从而平面 ABC ⊥平面 BSC.

【高考链接】

解：（1）过 B 作 $BE\perp B_1C$，连 AE，得 $AE\perp B_1C$，

所以线段 AE 的长就是点 A 到直线 B_1C 的距离.

在 Rt△B_1BC 中，$BC=a$，$BB_1=2a$，得 $B_1C=\sqrt{5}a$，又∵ $BE\times B_1C=B_1B\times BC$

$\therefore BE=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$，在 Rt△$AEB$ 中，$AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\dfrac{\sqrt{35}}{5}a$

故点 A 到直线 B_1C 的距离为 $\dfrac{\sqrt{35}}{5}a$.

（2）由（1）知 $\angle AEB$ 就是二面角 $A-B_1C-B$ 的平面角，

在 Rt△AEB 中，$\tan\angle AEB=\dfrac{AB}{BE}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

所以二面角 $A-B_1C-B$ 的正切值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

9.7　柱、锥、球及其组合体（一）

【基础过关】

1. × × × × ×　　2. B　　3. $V=\dfrac{32\sqrt{3}}{3}\pi$

【巩固提高】

一、强化训练

1. A　2. C　3. B　4. B　5. 10　6. $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}\tan\alpha$　7. $6:2:3\sqrt{3}$

二、能力拓展

8. B　　9. $V=8\sqrt{3}$

【高考链接】

$V_{\mathrm{B-AED_1}}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle \mathrm{AED_1}}\times AB=\dfrac{1}{12}a^2$

9.8　柱、锥、球及其组合体（二）

【基础过关】

1. B　　2. 15π，12π　　3. 8∶1

【巩固提高】

一、强化训练

1. C　　2. C　　3. A　　4. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$　　5. $S_{侧}=4\sqrt{3}\pi$

6. 8　　7. $S_{侧}=32\pi\,\text{cm}^2$　　$V=\frac{64\sqrt{3}}{3}\pi\,\text{cm}^3$

二、能力拓展

8. $S_{全}=32\pi\text{cm}^2$　　$V=\frac{64}{3}\pi\text{cm}^3$

【高考链接】

B

本章小结与复习

【巩固提高】

一、强化训练

1. C　　2. C　　3. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$　　4. 15π　　5. $8\sqrt{3}\pi$　　6. $\frac{SC}{4\pi}$

二、能力拓展

7. 解：（1）因为 $OA=OC$，D 是 AC 的中点，$\therefore AC\perp OD$

又 $PO\perp$ 底面圆 O，$AC\subset$ 底面圆 O，$PO\perp AC$，又$\because PO\cap OD=\{O\}$，

所以 $AC\perp$ 平面 POD.

（2）由（I）知，$AC\perp$ 平面 POD，又 $AC\subset$ 平面 PAC，所以平面 $POD\perp$ 平面 PAC，在平面 POD 中，过 O 作 $OH\perp PD$ 于 H，则 $OH\perp$ 平面 PAC，连接 CH，则 CH 是 OC 在平面 PAC 上的射影，所以 $\angle OCH$ 是直线 OC 和平面 PAC 所成的角.

在 $\text{Rt}\triangle POD$ 中，$OH=\frac{PO\cdot OD}{\sqrt{PO^2+OD^2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

在 $\text{Rt}\triangle OHC$，$\sin\angle OCH=\frac{OH}{OC}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

8. 解：（1）因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱所以 $AB\perp A_1A$

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，所以 $AB\perp AC$，又$\because A_1A\cap AC=\{A\}$

所以 $AB\perp$ 平面 ACC_1A_1

又因为 $AC_1\subset$ 平面 ACC_1A_1，所以 $AB\perp A_1C$.

（2）如图 9-3 所示，作 $AD\perp A_1C$ 交 A_1C 于 D，连接 BD，由三垂线定理可得 $BD\perp A_1C$

所以 $\angle ADB$ 为所求二面角的平面角，

在 $\text{Rt}\triangle AA_1C$ 中，$AD\times A_1C=AA_1\times AC$，所以 $AD=\frac{\sqrt{6}}{2}$

所以在 Rt△BAD 中， $\tan\angle ADB=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

所以二面角 $A-A_1C-B$ 的正切值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

第 10 章　概率统计

10.1　计数原理

【基础过关】

1. D　　2. C　　3. C

【巩固提高】

一、强化训练

1. B　　2. A　　3. A

4. 解：（1）属于分类：第一类　从上层取一本书　有 5 种选择
第二类　从下层取一本书　有 4 种选择
共有 $N=5+4=9$ 种
（2）属于分步：第一步　从上层取一本书　有 5 种选择
第二步　从下层取一本书　有 4 种选择
共有 $N=5\times4=20$ 种

5. 解：（1） $46+21=67$ 种
（2） $46\times21=3082$ 种

6. 解： $2\times3+4\times2=14$ 种

7. 解：（1） $N=5\times5\times5=125$ 个
（2） $5\times4\times3=60$ 个
（3） $2\times4\times3=24$ 个

二、能力拓展

8. 解：（1） $3+5+6=14$ 种
（2） $3\times5\times6=90$ 种
（3） $3\times5+5\times6+3\times6=63$ 种

9. 解：（1） $5\times6\times6=180$
（2） $5\times5\times4=100$
（3） $5\times4+2\times4\times4=52$

【高考链接】

10

10.2　随机事件和概率

【基础过关】

1. D　　2. C　　3. D

【巩固提高】

一、强化训练

1. A　　2. C

3. 解：根据定义，事件（1）、（2）、（6）是必然事件；事件（4）、（5）是不可能事件；事件（3）、（7）、（8）是随机事件.

4. 解：（1）

时间范围	1 年内	2 年内	3 年内	4 年内
新生婴儿数	5544	9013	13520	17191
男婴数	2716	4899	6812	8590
男婴出生频率	0.49	0.54	0.50	0.50

（2）0.5

5. 解：0.95

6. 解：由上表可见，每 2000 个随机数中“7”出现的频率也稳定在 0.1 的附近．这就是频率的稳定性．我们把随机事件 A 的频率 $P(A)$ 作为随机事件 A 的概率 $P(A)$ 的近似值，即 $P(A)=0.1$：

点评：利用概率的统计定义，在计算每一个随机事件概率时都要通过大量重复的试验，列出一个表格，从表格中找到某事件出现频率的近似值作为所求概率.

二、能力拓展

7. 解：通过动手试验以及历史上曾经做过的大量的试验，可以感受到：抛掷硬币出现正面向上是一个随机事件，在一次试验中它是否发生是不确定的，但随着试验次数的不断增加，它的发生具有一定的规律性，即它发生的比例会越来越稳定在 0.5 这个常数附近，即抛掷一枚硬币出现正面的概率为 0.5.

10.3　概率的简单性质

【基础过关】

1．解：（1）是互斥事件但不是对立事件；

（2）不是互斥事件，当然也不是对立事件；

（3）不是互斥事件，当然也不是对立事件；

（4）是互斥事件，也是对立事件.

2. 解：（1）不能. 因为甲命中目标与乙命中目标两事件不互斥.

（2）能. 因为命中靶的内圈和命中靶的其余部分是互斥事件.

（3）不对. 因为“不出现正面”与“同时出现正面”不是对立事件，故其概率和不为 1.

3．解：（1）$\overline{A}$ 指“向上的点数小于 5”；（2）$\overline{A}$ 的对立事件指 A，“向上的点数至少为 5”.

【巩固提高】

一、强化训练

1. B

2. 解：事件 A与C， C与D， B与C 是互斥事件，事件 C与D 也是对立事件.

3. 解：（1） $P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.25+0.25=0.5$

（2） $P(D)=1-P(C)=0.5$

4. 解：设事件 A：取得两个红球；事件 B：取得两个绿球；事件 C：取得两个同颜色的球；事件 D：至少取得一个红球. 由题意知

$$P(A)=\frac{7\times 6}{10\times 9}=\frac{7}{15},\ P(B)=\frac{3\times 2}{10\times 9}=\frac{1}{15}$$

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{8}{15}$$

$$P(D)=1-P(B)=\frac{14}{15}$$

5. 解：设事件 A：任选 2 人，2 人血型不同.

$$P(A)=2\times\frac{12\times 10+12\times 8+12\times 6+10\times 8+10\times 6+8\times 6}{36\times 35}=\frac{34}{45}$$

6. 解：事件 A：任取一球，取到红球，事件 B：任取一球，取到黑球，事件 C：任取一球，取到白球，事件 D：任取一球，取到绿球. 事件 A、B、C 与 D 是彼此互斥事件. 事件 E：任取 2 球，取到至少一个红球.

由题意

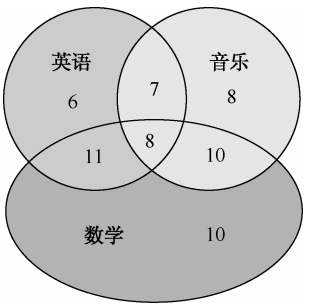
（1） $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{12}+\frac{4}{12}=\frac{3}{4}$

（2） $P(E)=\frac{7\times 6}{12\times 11}=\frac{7}{22}$

二、能力拓展

7. 解：（1） $39+32+33=104$，$p=\frac{7}{104}+\frac{11}{104}+\frac{10}{104}+\frac{8}{104}=\frac{36}{104}=\frac{9}{26}$

（2） $p=1-\frac{8}{104}=\frac{96}{104}=\frac{12}{13}$



8. 解：设事件 A：抽验三只都是红球，事件 B：抽验三只都是黑球，事件 C：抽验三只都是白球，事件 D：抽验三只都是同色球，事件 E：抽验三只都是异色球，得

$$P(D)=P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$
$$=\frac{5\times4\times3}{12\times11\times10}+\frac{4\times3\times2}{12\times11\times10}+\frac{3\times2\times1}{12\times11\times10}=\frac{3}{44}$$
$$P(E)=\frac{5\times4\times3}{12\times11\times10}=\frac{3}{22}$$

【高考链接】

C

10.4 等可能事件的概率（一）

【基础过关】

1. 解：会出现“正面朝上”、“正面朝下”两种情况

P（“正面朝上”）$=P$（“反面朝上”）$=\frac{1}{2}$

2. 解：会出现“1 点”、“2 点”、“3 点”、“4 点”、“5 点”、“6 点”六种情况

P（“1 点”）$=P$（“2 点”）$=P$（“3 点”）$=P$（“4 点”）$=P$（“5 点”）$=P$（“6 点”）$=\frac{1}{6}$

3. 解：P（“出现奇数点”）$=P$（“1 点”）$+P$（“3 点”）$+P$（“5 点”）

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

【巩固提高】

一、强化训练

1.（1）6　　（2）2　　（3）$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

2.（1）4　　（2）2　　（3）$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$　　（4）$\frac{1}{4}$

3. B　　4. B

5. 解：（1）有 $4\times3=12$ 种

（2）有 $3\times2=6$ 种

（3）$P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

6. 解：将骰子各抛掷 1 次，根据分步计数原理，一共有 $6\times6=36$ 种结果.

其和为 6 共有：（1，5）、（5，1）、（2，4）、（4，2）、（3，3） 5 种；其和为 7 有：（1，6）、（6，1）、（2，5）、（5，2）、（3，4）、（4，3）6 种

记事件 A：向上的数之和是 6，$P(A)=\frac{5}{36}$

记事件 B：向上的数之和是 7，$P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

因为 $\frac{1}{6}>\frac{5}{36}$，所以弟弟不应该同意，因为游戏规则不公平.

二、能力拓展

7. 解：设 A=“取出的两球是相同颜色”，B=“取出的两球是不同颜色”，则事件 A 的概

率为：$P(A)=\dfrac{3\times2+3\times2}{9\times6}=\dfrac{2}{9}$. 由于事件 A 与事件 B 是对立事件，所以事件 B 的概率为：$P(B)=1-P(A)=1-\dfrac{2}{9}=\dfrac{7}{9}$.

【高考链接】

$\dfrac{3}{14}$

10.5 等可能事件的概率（二）

【基础过关】

1. 解：设“恰好取在区间[0，3]上”为事件 A，由几何概型知，所求的概率为 $P(A)=\dfrac{1}{3}$.

2. 解：在图（1）中，顾客中奖的概率为 $\dfrac{1}{2}$，图（2）中顾客中奖的概率为 $\dfrac{3}{5}$.

3. 解：记“钻到油层面”为事件 A，则 $P(A)=\dfrac{\text{储藏石油的大陆架面积}}{\text{所有海域的大陆架面积}}=\dfrac{40}{10000}=0.004$.

答：钻到油层面的概率是 0.004.

【巩固提高】

一、强化训练

1. B　　2. A　　3. B

4. 解：由几何概型知，所求事件 A 的概率为 $P(A)=\dfrac{1}{11}$.

5. 解：设 $A=\{$等待的时间不多于 10 分钟$\}$，我们所关心的事件 A 恰好是到站等车的时刻位于[50，60]这一时间段内，因此由几何概型的概率公式，得 $P(A)=\dfrac{60-50}{60}=\dfrac{1}{6}$，

即此人等车时间不多于 10 分钟的概率为 $\dfrac{1}{6}$.

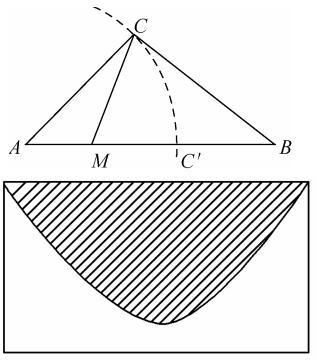
6. 解：由已知可得，海豚的活动范围在 $26\times16\text{m}^2$ 的区域外，

所以海豚嘴尖离岸边不超过 2m 的概率为 $P=1-\dfrac{26\times16}{30\times20}=0.308$.

二、能力拓展

7. 解：在 AB 上截取 $AC'=AC$，于是

$$P(AM<AC)=P(AM<AC')=\frac{AC'}{AB}=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



答：AM 的长小于 AC 的长的概率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

8. 解：设所求的面积为 S，由题意得 $S=36$.

10.6 总体、样本和抽样方法（一）

【基础过关】

1. D　　2. A

3．解：将 45 名学生编号为 1，2，…，45，并做好大小、形状相同的号签，分别写上这 45 个数，将这些号签放在一起，进行均匀搅拌，接着连续抽取 5 个号签，然后对这 5 名学生进行问卷调查.

【巩固提高】

一、强化训练

1. D　　2. C　　3. A　　4. $\frac{1}{40}$

5．解：抽签法，步骤：

第一步　将 30 台机器编号，号码是 01，02，…，30；

第二步　将号码分别写在形状、大小相同的纸条上，制成号签；

第三步　将得到的号签放入不透明的袋子中，并充分搅匀；

第四步　从袋子中依次抽取 3 个号签，并记录上面的编号；

第五步　所得号码对应的 3 台机器就是要抽取的样本.

6. 解：① 将 40 件产品编号，可以编为 00，01，02，…，38，39；

② 在随机数表中任选一个数作为开始，例如从第 8 行第 9 列的数 5 开始；

③ 从选定的数 5 开始向右读下去，得到一个两位数字号码 59，由于 59＞39，将它去掉；继续向右读，得到 16，将它取出；继续下去，又得到 19，10，12，07，39，38，33，21，随后的两位数字号码是 12，由于它在前面已经取出，将它去掉，再继续下去，得到 34．至此，10 个样本号码已经取满，于是，所要抽取的样本号码是 16，19，10，12，07，39，38，33，21，34.

二、能力拓展

7. 解：**方法一**

第一步　将元件的编号调整为 010，011，012，…，099，100，…，600；

第二步　在随机数表中任选一数作为开始，任选一方向作为读数方向．比如，选第 6 行第 7 个数“9”，向右读；

第三步　从数“9”开始，向右读，每次读取三位，凡不在 010～600 中的数跳过去不读，前面已经读过的也跳过去不读，依次可得到 544，354，378，520，384，263；

第四步　以上这 6 个号码所对应的 6 个元件就是所要抽取的对象.

方法二

第一步　将每个元件的编号加 100，重新编号为 110，111，112，…，199，200，…，700；

第二步　在随机数表中任选一数作为开始，任选一方向作为读数方向．比如，选第 8 行第 1 个数“6”，向右读；

第三步　从数“6”开始，向右读，每次读取三位，凡不在 110～700 中的数跳过去不读，前面已经读过的也跳过去不读，依次可得到 630，163，567，199，507，175；

第四步　这 6 个号码分别对应原来的 530，63，467，99，407，75．这些号码对应的 6 个元件就是要抽取的对象．

10.7　总体、样本和抽样方法（二）

【基础过关】

1. C　　2. A　　3. D

【巩固提高】

一、强化训练

1. B　　2. 5，50　　3. 192

4. 解：按照 1：5 的比例，应该抽取的样本容量为 295÷5=59，我们把 259 名同学分成 59 组，每组 5 人，第一组是编号为 1～5 的 5 名学生，第 2 组是编号为 6～10 的 5 名学生，依次下去，59 组是编号为 291～295 的 5 名学生. 采用简单随机抽样的方法，从第一组 5 名学生中抽出一名学生，不妨设编号为 $k(1\leqslant k\leqslant 5,\ k\in \mathbf{N})$，那么抽取的学生编号为：$k+5l(l=0,1,2,3,\cdots,58)$，得到 59 个个体作为样本，如当 $k=3$ 时的样本编号为 3，8，13，…，288，293.

5. 解：总体人数为：$400+302+250=952$ 人．

$\because \dfrac{952}{190}=5\cdots 2,\ \dfrac{400}{5}=80,\ \dfrac{302-2}{5}=60,\ \dfrac{250}{5}=50$

$\therefore$ 从高二年级中剔除 2 人．

因此从高一、高二、高三年级中分别抽取 80 人、60 人、50 人．

6. 解：因为疾病与地理位置和水土均有关系，所以不同乡镇的发病情况差异明显，因而采用分层抽样的方法，具体过程如下：

（1）将 3 万人分为 5 层，其中一个乡镇为一层；

（2）按照样本容量的比例随机抽取各乡镇应抽取的样本；

$300\times\dfrac{3}{15}=60$，$300\times\dfrac{2}{15}=40$，$300\times\dfrac{5}{15}=100$，$300\times\dfrac{2}{15}=40$，$300\times\dfrac{3}{15}=60$，

因此各乡镇抽取人数分别为 60 人、40 人、100 人、40 人、60 人.

（3）将 300 人组到一起，即得到一个样本.

二、能力拓展

7. C　　8. A

10.8　总体分布估计

【基础过关】

1. A　　2. B

3. 解：频率分布表如下：

分组	频数	频率
[40，50]	2	0.04
[50，60]	3	0.06
[60，70]	10	0.2
[70，80]	15	0.3
[80，90]	12	0.24
[90，100]	8	0.16
合计	50	1

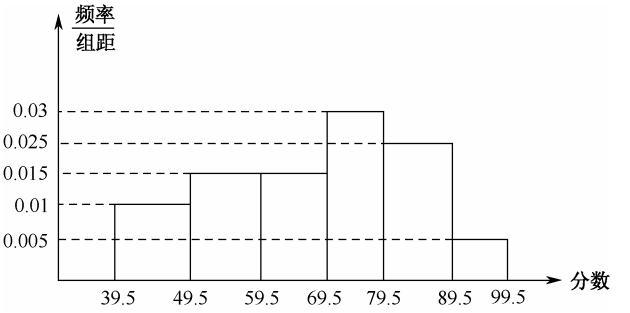
【巩固提高】

一、强化训练

1. A　　2. 0.25　　3. D

4. 解：（1）$60\times0.015\times10=9$、$0.015\times10=0.15$ 即频数是9、频率是0.15.

（2）$(0.015+0.025+0.03)\times10=0.7$，即及格率是70%.



5．解：（1）$M=\dfrac{1}{0.02}=50$，$m=50-(1+4+20+15+8)=2$

$N=1$，$n=\dfrac{2}{50}=0.04$

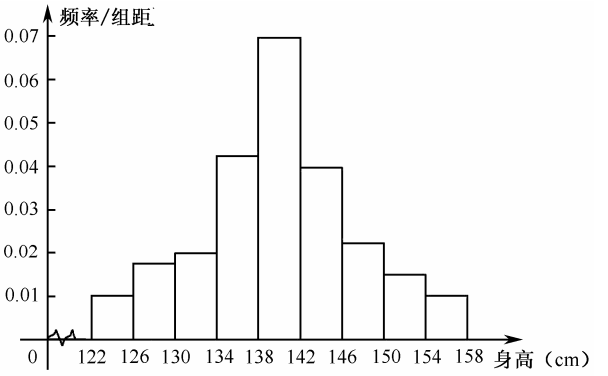
（2）略

（3）全体女生中身高在153.3～157.5范围内的人数最多.

6. 解：（1）样本频率分布表如下：

分组	频数	频率
［122，126）	5	0.04
［126，130）	8	0.07
［130，134）	10	0.08
［134，138）	22	0.18
［138，142）	33	0.28
［142，146）	20	0.17
［146，150）	11	0.09
［150，154）	6	0.05
［154，158）	5	0.04
合计	120	1

（2）其频率分布直方图如下：



（3）由样本频率分布表可知身高小于134cm的男孩出现的频率为$0.04+0.07+0.08=0.19$，所以我们估计身高小于134cm的人数占总人数的19%.

二、能力拓展

7. A

8. 解：（1）由于频率分布直方图以面积的形式反映了数据落在各小组内的频率大小，

因此第二小组的频率为：$\frac{4}{2+4+17+15+9+3}=0.08$；

又因为频率=$\frac{\text{第二小组频数}}{\text{样本容量}}$，

所以样本容量=$\frac{\text{第二小组频数}}{\text{第二小组频率}}=\frac{12}{0.08}=150$.

（2）由图可估计该学校高一学生的达标率约为$\frac{17+15+9+3}{2+4+17+15+9+3}\times100\%=88\%$.

10.9 总体特征值估计

【基础过关】

1. 28　　2. 84.5

3. 解：$\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}=12.4$，$s_{甲}^2=0.12$，$s_{乙}^2=0.10$，故选派乙.

【巩固提高】

一、强化训练

1. B　　2. C　　3. B

4. 解：$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{10}$（8+6+…+5）=7.1，$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{10}$（7+6+…+7）=6.9

$s_{甲}^2=\frac{1}{10}$［（8−7.1）^{2}+…+（5−7.1）^{2}］=3.69

$s_{乙}^2=\frac{1}{10}$［（7−6.9）^{2}+…+（7−6.9）^{2}］=1.29

∴乙优于甲.

5. 解：$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{5}$（9.8+9.9+10.1+10+10.2）=10

$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{5}$（9.4+10.3+10.8+9.7+9.8）=10

$s_{甲}^2=\frac{1}{5}$［(9.8−10)^2+（9.9−10)^2+（10.1−10)^2+（10−10)^2+（10.2−10)^2］=0.02

$s_{乙}^2=\frac{1}{5}$［(9.4−10)^2+（10.3−10)^2+（10.8−10)^2+（9.7−10)^2+（9.8−10)^2］=0.244

∴甲比乙稳定.

6. 解：$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{10}$（10.2+10.1+…+10.1）=10

$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{10}$（10.3+10.4+…+10）=10

$s_{甲}^2=\frac{1}{10}$［(10.2−10)^2+（10.1−10)^2+…+（10.1−10)^2］=0.03

$s_{乙}^2=\frac{1}{10}$［(10.3−10)^2+（10.4−10)^2+…+（10−10)^2］=0.06

由上述结果分析，甲台机床加工这种零件稳定，较合适.

二、能力拓展

7. 解：$\bar{x}_1=\frac{1}{5}$（21.5+20.4+…+19.9）=21

$\bar{x}_2=\frac{1}{5}$（21.3+18.9+…+21.8）=21

$\bar{x}_3=\frac{1}{5}$（17.8+23.3+…+20.9）=20.5

$s_1^2=1.452$

$s_2^2=1.452$

$s_3^2=3.610$

$\bar{x}_1=\bar{x}_2>\bar{x}_3$ 且 $s_1^2<s_2^2<s_3^2$，说明第 1 种西红柿品种既高产又稳定.

10.10 一元线性回归

【基础过关】

1. C　　2. B　　3. C

【巩固提高】

一、强化训练

1. D　　2. B　　3. C

4．解：表中的数据进行具体计算，列成表格如下：

I	1	2	3	4	5	6	7
x_i	15	20	25	30	35	40	45
y_i	330	345	365	405	445	450	455
x_iy_i	4950	6900	9125	12150	15575	18000	20475

$\bar{x}=30,\ \bar{y}=399.3,\ \sum_{i=1}^{7}x_i^2=7000,\ \sum_{i=1}^{7}y_i^2=1132725,\ \sum_{i=1}^{7}x_iy_i=87175$

故可得到 $$b=\frac{87175-7\times30\times399.3}{7000-7\times30^2}\approx4.75$$

$$a=399.3-4.75\times30\approx257$$

从而得回归直线方程是 $\hat{y}=4.75x+257$．

5. 解：由表中数据经计算可得 $\bar{x}=\frac{510}{11}$，$\bar{y}=\frac{214}{11}$，由线性回归公式得：$b=0.304$，$a=5.36$，故 y 对 x 的回归直线方程为 $\hat{y}=0.304x+5.36$．

回归系数 $b=0.304$ 的意义是：腐蚀时间 x 每增加一个单位，深度 y 平均增加 0.304 个单位．

6. 解：（1）$\bar{x}=\frac{1}{10}(63+67+45+88+81+71+52+99+58+76)=70$．

$\bar{y}=\frac{1}{10}(65+78+52+82+92+89+73+98+56+75)=76$．

$$\therefore b=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}\approx0.76556\ .$$

$a=\bar{y}-b\bar{x}=22.4108$．

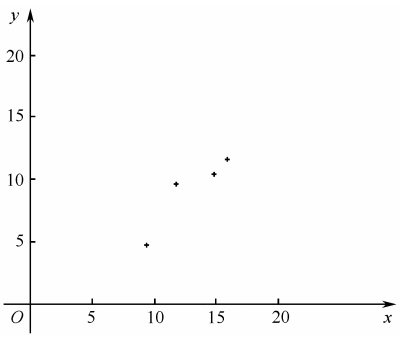
故所求线性回归直线方程是 $\hat{y}=0.76556x+22.4108$．

（2）某学生入学成绩为 80 分，代入上式可求得 $\hat{y}\approx84$．

二、能力拓展

7.【分析】散点图形象地反映了各对数据的密切程度，通常在尚未判断两个变量之间是否具有线性相关关系的情况下，应先进行相关性检验，在确认具有线性相关关系后，再求其回归直线方程.

解：（1）散点图如下图所示：



（2）易求得$\bar{x}=12.5$，$\bar{y}=8.25$，$b=0.7286$，$a=-0.8571$，

∴所求回归直线方程为$\hat{y}=0.7286x-0.8571$.

（3）依题意，要使$\hat{y}\leqslant 10$，只要$0.7286x-0.8571\leqslant 10$，解得$b\leqslant 14.9013$，即机床的运转速度不能超过14.9013转/秒.

本章小结与复习

【巩固提高】

一、强化训练

1. C　　2. B　　3. D　　4. B　　5. C

6. 解：设A：取到卡号是7的倍数，B：取到卡号是5的倍数

C：取到卡号是7的倍数或者是5的倍数

（1）取到卡号是7的倍数的有7，14，21，…，98，共有$\frac{98-7}{7}+1=14$种；

（2）$P(A)=\frac{14}{100}=\frac{7}{50}$；

（3）$P(B)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$，$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{7}{50}+\frac{1}{5}=\frac{17}{50}$.

二、能力拓展

7. 解：整个正方形木板的面积，即基本事件所占的区域总面积为$\mu_\Omega=16\times 16=256\text{cm}^2$.

记“投中大圆内”为事件A，“投中小圆与中圆形成的圆环”为事件B，“投中大圆之外”为事件C，则事件A所占区域面积为$\mu_A=\pi\times 6^2=36\pi\text{cm}^2$；事件$B$所占区域面积为$\mu_B=\pi\times 4^2-\pi\times 2^2=12\pi\text{cm}^2$；事件$C$所占区域面积为$\mu_C=(256-36\pi)\text{cm}^2$.

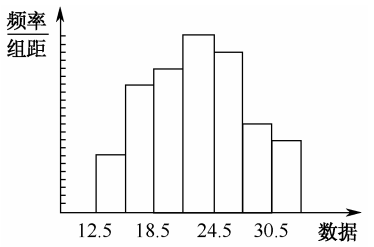
由几何概型的概率公式，得（1）$P(A)=\frac{\mu_A}{\mu_\Omega}=\frac{9}{64}\pi$；（2）$P(B)=\frac{\mu_B}{\mu_\Omega}=\frac{3}{64}\pi$；

（3）$P(C)=\frac{\mu_C}{\mu_\Omega}=1-\frac{9}{64}\pi$.

8. 解：（1）样本的频率分布表如下：

分　组	频　数	频　率
12.5～15.5	6	0.06
15.5～18.5	16	0.16
18.5～21.5	18	0.18
21.5～24.5	22	0.22
24.5～27.5	20	0.20
27.5～30.5	10	0.10
30.5～33.5	8	0.08
合　计	100	1.00

（2）频率分布直方图如下图所示.



（3）数据大于等于 30.5 的频率是 0.08，∴小于 30.5 的频率是 0.92，
∴数据小于 30.5 的概率约为 0.92.

读者意见反馈表

书名：课课通数学（第二册）　　**主编**：崔永红　狄昌进　　**策划编辑**：张　凌　陶　亮

谢谢您关注本书！烦请填写该表。您的意见对我们出版优秀教材、服务教学，十分重要。如果您认为本书有助于您的教学工作，请您认真地填写表格并寄回。**我们将定期给您发送我社相关教材的出版资讯或目录，或者寄送相关样书。**

个人资料

姓名＿＿＿＿年龄＿＿联系电话＿＿＿＿（办）＿＿＿＿（宅）＿＿＿＿（手机）

学校＿＿＿＿专业＿＿＿＿职称/职务＿＿＿＿

通信地址＿＿＿＿ 邮编＿＿＿＿E-mail＿＿＿＿

本书在内容上需要更正的疏漏、错误：

请您详细填写：＿＿＿＿

巩固练习、试卷参考答案是否存在不匹配、错误的答案：

请您详细填写：＿＿＿＿

还存在哪些没有覆盖到的知识点、考点：

请您补充：＿＿＿＿

您希望本书内容在哪些方面得到改进？

□知识要点　□例题解析　□巩固练习　□试卷数量　□配套资源

请您详细填写：＿＿＿＿

感谢您的配合，您的意见是我们进步的阶梯！可将本表或者您的建议、意见，按以下方式反馈给我们：

【方式一】电子邮件：zling@phei.com.cn（张凌）

【方式二】邮局邮寄：北京市万寿路 173 信箱华信大厦 1302 室 中等职业教育分社（邮编：100036）

张凌 收　电话：010-88254583

如果您需要了解更详细的信息或有著作计划，请与我们联系。